PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
Ampla associação entre
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Universidade de Cuiabá

HELIO CINQUINI VIANNA JÚNIOR

ESTADO DO CONHECIMENTO SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES: ANÁLISE DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (MTSK)

CUIABÁ – MT
2022

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
Ampla associação entre
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Universidade de Cuiabá

HELIO CINQUINI VIANNA JÚNIOR

ESTADO DO CONHECIMENTO SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES: ANÁLISE DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (MTSK)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Ensino (PPGEn), nível mestrado do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Mato Grosso em parceria ampla com a Universidade de Cuiabá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Carbo
Linha: Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas tecnologias

CUIABÁ – MT

2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Jorge Nazareno Martins Costa – CRB1- 3205

V617e Vianna Júnior, Helio Cinquini

Estado do conhecimento sobre o ensino de funções: análise do conhecimento especializado de professores de matemática (mtsk) / Helio Cinquini Vianna Júnior . -- Cuiaba – MT, 2022.

101f.:il. Color; 30cm

Orientador: Prof. Dr. Leandro Carbo
Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Programa de Pós - Graduação Stricto Sensu (Ensisno), Cuiabá, 2022.

Inclui Bibliografia

1. Ensino da Matemática 2. Ensino – Formação de Professores 3. Ensino da Matemática e docência. I.Título.

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Campus Cuiabá
ATA Nº 5/2022 - CBA-PPGEN/CBA-DPPG/CBA-DG/CCBA/RTR/IFMT

ATA DE BANCA DE DEFESA DE PÓS-GRADUAÇÃO - MESTRADO

Cidade, data e horário	Cuiabá-MT, 09 de março de 2022, 14h
Local	*Campus* Cuiabá "Octayde", Sala Virtual (**https://meet.google.com/dai-nsgh-srp**)
Discente	Hélio Cinquini Vianna Júnior
Matrícula	2020180660115
Curso de pós-graduação	Mestrado em Ensino
Tipo de Exame	**Defesa**
Título do trabalho	Estado do Conhecimento Sobre o Ensino de Funções: Análise do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK)

Membros da Banca Examinadora	Instituição	Examinador
Prof. Dr. Leandro Carbo	Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT	Presidente
Prof. Dr. Geison Jader Mello	Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT	Interno
Profa. Dra. Edvonete Souza de Alencar	Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD	Externo
Profa. Dra. Ana Cláudia Tasinaffo Alves	Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT	Interno suplente

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Concluídas as etapas de apresentação, arguição e avaliação do trabalho, a Banca Examinadora decidiu pela**APROVAÇÃO** do mestrando neste Exame. Foi concedido o prazo regulamentar do curso (**45** dias) para que sejam efetuadas as correções sugeridas pela Banca Examinadora. Para constar, foi lavrada a presente Ata e assinada eletronicamente pelos membros da Banca Examinadora.

Notas. 1) O Presidente enviará esta ata à Secretaria do curso de Pós-Graduação com as assinaturas eletrônicas em até 48h. 2) Para assinar a ata pelo SUAP o Examinador Externo deve estar cadastrado no Módulo Administração - Prestador de Serviço. 3) O título de conclusão do discente será expedido após o discente cumprir todas as normativas do Curso e do IFMT.

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação aos meus pais, que nunca mediram esforços para tornar as coisas mais fáceis em minha caminhada e principalmente por sempre me darem o essencial: apoio, carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder esta oportunidade e por me dar forças para chegar até aqui.

Aos Profs. Drs. Jeferson Gomes Moriel Junior e Leandro Carbo por suas dedicações e excepcionais orientações para que o trabalho fosse concluído.

Ao Prof. Dr. Geison Jader Mello por aceitar fazer parte da banca interna e contribuir com o presente trabalho.

A Profa. Dra. Edvonete Souza de Alencar pelas importantes contribuições como membro da banca externa.

Aos membros do grupo de pesquisa TSK *Group* e aos colegas e amigos de turma pelas trocas de experiências e pelo apoio recebido ao longo desta caminhada.

Aos professores do programa por compartilharem seus conhecimentos.

Aos meus pais Helio Cinquini Vianna e Irani Batista de Oliveira Vianna e a minha irmã Heloisa Cinquini Vianna por me darem força e me apoiarem ao longo da minha vida.

Aos meus familiares e amigos por me incentivarem e acreditarem na minha capacidade.

RESUMO

Contexto: o tema de Funções está presente em diversas situações do nosso cotidiano e em diversas áreas da ciência e tecnologia. Uma das formas de avançar na compreensão do conhecimento docente para o seu ensino é a partir da produção científica voltada à temática em questão. **Objetivo**: realizar um mapeamento da produção científica relativa ao conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica no período entre 2015 e 2020. **Método**: trata-se de um estado do conhecimento qualitativo das produções sobre o conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica encontradas na base *Web Of Science* no período em questão. Os dados foram analisados na forma vertical e horizontal sobre o foco da pesquisa, referencial teórico, metodologia, nível de ensino, resultados e conhecimentos especializados com o instrumento iMTSK. **Resultados**: as produções se caracterizam por estudos de caso qualitativo, envolvendo análise das aulas por gravação de áudio e vídeo, entrevistas semiestruturadas e testes para analisar o conhecimento de professores de Matemática, principalmente ao ensinar os conceitos básicos de Funções no Ensino Médio e no Ensino Médio Profissional e que já possuem experiência no nível em que atuam. Quanto aos referenciais teóricos, identifica-se a preferência por modelos que se referem exclusivamente ao conhecimento do professor de Matemática. Os indícios e evidências de conhecimentos especializados identificados nas produções contemplam todos os subdomínios do *Mathematics, Teachers' Specialized Knowledge*, mas não todas as categorias, considerando que houve a predominância do Conhecimento dos Tópicos da Matemática. As produções trazem importantes contribuições para o conhecimento especializado de professores, principalmente em relação à abordagem inicial dos conceitos de Função a partir das tarefas exploratórias sobre aplicações desses conceitos em problemas do cotidiano. **Conclusão**: os resultados trazem maior compreensão sobre como as pesquisas relativas ao conhecimento docente para o ensino de Funções vêm sendo realizadas, quais os principais referenciais teóricos adotados pelos pesquisadores, quais os resultados alcançados e os conhecimentos especializados mobilizados pelos professores.

Palavras-chave: Ensino; Funções; Matemática; MTSK.

ABSTRACT

Context: The theme Functions are present in several situations of our daily lives and in several areas of science and technology. One of the ways to advance in the comprehension/understanding of teaching knowledge of its teaching is from a scientific production focused on the subject in question. **Objective:** Carry out a mapping of scientific production related to teaching knowledge to the teaching of functions in basic education in the period between 2015 and 2020. **Method:** This is a qualitative literature synthesis study of the productions about the teaching knowledge for the teaching of functions in basic education found in the base *Web of science* on the period in question. The data were analyzed vertically and horizontally on the research focus, theoretical framework, methodology, level of education, results and specialized knowledge with the iMTSK instrument. **Results:** The productions are characterized by qualitative case studies, involving analysis of audio and video recordings during classes, semi-structured interviews and tests do analyze the mathematics teacher knowledge, mainly when teaching the basic concepts of Functions in high school and professional high school and who already have experience at the level at which they work. As for the theoretical references, it is identified the preference for models that refer exclusively to the Mathematics teacher knowledge. The clues and evidence of specialized knowledge identified in productions contemplate all the Mathematics, Teachers' Specialized Knowledge subdomains, but not all categories, considering that there was a predominance of Knowledge of Mathematics Topics. The productions brings important contributions to the teacher specialized knowledge, mainly in relation to the initial approach of the concepts of Function from exploratory tasks in applications of these concepts in everyday problems. **Conclusion**: The results bring greater understanding about how the research related to the teacher knowledge of teaching Functions has been carried out, what are the main theoretical references adopted by the researchers, what results were achieved and the expertise mobilized by teachers.

Keywords: Teaching; Functions; Mathematics; MTSK.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

TEMA DA PESQUISA

A presente pesquisa é sobre o conhecimento especializado do professor de Matemática para ensinar o conteúdo de Funções na Educação Básica a partir de uma síntese da produção científica sobre o conhecimento docente para o ensino do referido tema.

O tema de Funções foi escolhido devido a vários aspectos, tais como: sua importância para o ensino de Matemática; fazer parte de outras áreas além desta (ARDENGHI, 2008; LIMA, 2013; BENEDITO; BERNARDES, 2019); seus conceitos serem de suma importância em diversos cursos no Ensino Superior (ARAUJO, 2018) e apresentar uma gama de aplicações na vida cotidiana, como, por exemplo, no valor a ser gasto em uma padaria em função da compra de uma certa quantidade de pães.

Outro aspecto que contribuiu para com o interesse relacionado a esta temática foi o lado pessoal e profissional do autor que, durante a experiência profissional em estágios supervisionados, Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), atuações na Educação Básica e Ensino Superior, percebeu que o ensino de Funções tem sido desafiador, e por diversas vezes, os resultados se mostraram insatisfatórios.

Partindo da ideia de que o professor é crucial no processo de ensino de Matemática, e seguindo a tendência das pesquisas voltadas para o conhecimento do professor, optou-se por realizar a presente síntese da literatura sobre o conhecimento especializado para o ensino de Funções na Educação Básica, tomando como referência o modelo teórico *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* de Carrillo *et al.* (2014) para analisar o conhecimento mobilizado por professores de Matemática ao ensinar Funções.

ESTUDOS ANTECEDENTES

Realizamos uma busca na literatura por estudos de mapeamento sobre o conhecimento mobilizado por professores de Matemática e para o ensino de Funções. Tais estudos contribuíram para a presente pesquisa, seja como guia para os procedimentos metodológicos, ou para nos apontar até onde houveram avanços na literatura sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática para o ensino de Funções.

Gumiero e Pazuch (2020) realizaram uma síntese de 16 produções científicas sobre *Knowledge Quartet* a fim de identificar como essas pesquisas têm sido realizadas, as dimensões e códigos utilizados para a investigação na educação matemática, e como o *Knowledge Quartet* têm contribuído para a constituição do conhecimento profissional do professor de Matemática. O *Knowledge Quartet* é um modelo teórico de conhecimento caracterizado pela prática do professor em sala de aula (GUMIERO; PAZUCH, 2020) e envolve o conhecimento específico do conteúdo e o conhecimento matemático pedagógico. Suas dimensões são Fundamento, Transformação, Conexão e Contingência. Neste estudo, identificou-se que a maioria das pesquisas se apropriam da gravação de vídeo e são qualitativas. Também observaram que a prática mais comum é contemplar todas as quatro dimensões e códigos do *Knowledge Quartet*, favorecendo a reflexão do conhecimento docente e o ampliando, assim, valorizando a prática do professor. Tal estudo nos auxiliou na construção metodológica desta pesquisa, tomando como referência sua estrutura e metodologia.

Em relação ao ensino de Funções, Pazuch e Ribeiro (2017) realizaram uma revisão da literatura de artigos nacionais e internacionais. Esta pesquisa faz parte de um estudo mais amplo que visa investigar o conhecimento profissional dos professores de Matemática ao planejar e reproduzir aulas sobre o conteúdo de Funções. Pazuch e Ribeiro (2017) analisam as produções publicadas em periódicos classificados por *webqualis* A1, A2 e B1 na área de ensino no período entre 2006 e 2015. Os trabalhos selecionados foram divididos em dois eixos: Conhecimento profissional do professor de Matemática e Conhecimento profissional do professor de Matemática e os conceitos de Funções. Os autores identificaram os principais referenciais teóricos utilizados referente ao conhecimento docente e aos conceitos de função. As produções, em sua maioria, têm como foco principal a compreensão dos conceitos de Função pelo professor em formação inicial e continuada e utilizam como instrumentos as gravações de vídeo, observação de aulas e protocolos de resolução de questões como coleta de dados. Seus resultados mostram as construções delineadas, dificuldades na resolução e na exploração de questões e tarefas, equívocos, erros apresentados e as necessidades de resultados requeridos na formação inicial e continuada e os conhecimentos mobilizados por professores de Matemática. É destacado que existe uma predominância da representação algébrica, da representação gráfica e as dificuldades em relação à linguagem matemática em relação a professores de Matemática em sala de aula. O estudo de Pazuch e Ribeiro (2017) contribuíram com o recorte temporal a fim de verificar os avanços da literatura.

Araujo (2018) realizou um estudo de caso instrumental em um contexto de experiência *Lesson Study* de grupo chamado Grupo de Sábado, no qual os participantes são professores de diferentes níveis escolares sobre experiências vivenciadas e conhecimentos especializados mobilizados por duas professoras (Alegre e Doce) que planejaram, implementaram e refletiram sobre uma tarefa inicial relativa à introdução ao estudo de Função. Tais tarefas visavam explorar analogicamente o conceito de Função como referência o funcionamento de uma máquina.

O contexto de pesquisa possibilitou uma conexão de um processo de desenvolvimento do professor de Matemática com o modelo analítico do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK), auxiliando a identificar o conhecimento especializado de professores e o processo de ensino e aprendizagem de Funções (ARAUJO, 2018). Os conhecimentos mobilizados por Doce contemplavam os subdomínios do conhecimento dos tópicos matemáticos (definição, propriedades, registros de representação e procedimentos), conhecimento da estrutura matemática (conexões de simplificação, conexões de complexidade, conexões transversais e conexões auxiliares), conhecimento da prática matemática (uso de símbolos e linguagem formal da Matemática), conhecimento do ensino da matemática (estratégias, técnicas, tarefas e exemplos), conhecimento das características de aprendizagem matemática (potencialidades e dificuldades dos alunos) e conhecimento dos padrões de aprendizagem matemática (conhecimento sobre currículo e sequência de temas anteriores e posteriores. Enquanto os subdomínios contemplados pelo conhecimento de Alegre são: conhecimento dos tópicos matemáticos (procedimentos, definição, propriedades e registros de representações), conhecimento da estrutura matemática (conexões de simplificação, conexões de complexidade e conexões auxiliares), conhecimento da prática matemática (uso de símbolos e linguagem formal da Matemática e condições necessárias para definir), conhecimento do ensino da matemática (estratégias de ensino, teorias sobre ensino e recursos materiais), conhecimento das características de aprendizagem matemática (potencialidades e dificuldades dos alunos e interesses e expectativas) e conhecimento dos padrões de aprendizagem matemática (conhecimento sobre o currículo e sequência de temas anteriores e posteriores).

Os resultados possibilitaram o desenvolvimento de aprendizagem de conhecimento do professor mediante a troca de experiências e práticas dentro do contexto *Lesson study*. O autor identificou conhecimentos que convergiam e divergiam entre os sujeitos analisados, e também que o pensamento funcional do professor estabelece maior conectividade com o domínio do Conhecimento Matemático do MTSK.

PROBLEMA/PROBLEMÁTICA A SER INVESTIGADA

A Matemática é fundamental para o desenvolvimento científico e tecnológico de um país. Entretanto, este componente curricular é um dos mais temidos pelos estudantes durante a Educação Básica. Um dos fatores que contribuem para que exista esse temor é a dificuldade de compreensão dos conteúdos matemáticos abordados durante esta etapa de ensino. Tais aspectos tornam o ensino da Matemática desafiador para os professores.

Com o intuito de melhorar o ensino de Matemática, ao longo da história busca-se compreender melhor como o aluno aprende, quais metodologias têm maior potencialidade, como os professores planejam e ministram suas aulas e quais os conhecimentos mobilizados pelos professores ao ensinar e planejar aulas sobre um determinado conteúdo. O professor é peça fundamental no processo de ensino e aprendizagem da disciplina (RODRÍGUEZ-FLORES *et al.*, 2018) e o reconhecimento mundial de sua importância para o ensino contribuiu para que pesquisas sobre a formação de professores ganhassem um maior foco a partir da década de 1980 com um movimento de reformas educacionais em âmbito internacional (FIORENTINI *et al.*, 2002), e continua sendo uma das tendências importantes de investigação em educação matemática (PAZUCH; RIBEIRO, 2017).

O tema de Funções é de grande relevância no ensino de Matemática, pois além de seus conceitos serem abordados durante toda Educação Básica, seja implícita ou explicitamente (ARDENGHI, 2008), se estendem a diversos cursos de nível superior como, por exemplo, nas engenharias (ARAUJO, 2018). Portanto, há uma preocupação com a qualidade de ensino do referido tema que possui uma gama de aplicações na vida cotidiana, a exemplo da relação entre o custo de uma quantidade ‘x’ de pães e o valor de uma unidade. Seus conceitos também se aplicam a outras áreas como a Biologia, Física, Química, Geografia e Economia (LIMA, 2013; BENEDITO; BERNARDES, 2019).

O baixo rendimento dos estudantes em Matemática pode estar associado às dificuldades de aprendizagem de Funções (ARAUJO, 2018). Dentre elas são citadas: interpretações e construções gráficas, tabelamentos, diagrama de flechas e associação a lei de formação. Tais dificuldades não são exclusivas dos alunos, pois muitos professores em formação também apresentam dificuldades na compreensão desses conceitos (LIMA, 2013; RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018). A preocupação com a qualidade do ensino de Funções não é exclusiva do Brasil (LIMA, 2013), a problemática pode ser observada em outros países como, por exemplo, na Costa Rica, onde o tema de Funções é um dos que apresenta baixa porcentagem de aprendizado (RODRÍGUEZ-FLORES *et al.*, 2018).

O conhecimento matemático é necessário, mas não o suficiente para ensinar e fazer aprender matemática (MCCRORY *et al.*, 2012; ARAUJO, 2018), pois um dos problemas do ensino de Matemática está na desarticulação entre os conhecimentos específicos e pedagógicos na formação de professores (LIMA, 2013). Em Funções, por exemplo, muitos professores mostram as definições, apresentam os exemplos e aplicam exercícios (SANTOS DE SOUZA;

SOUZA, 2018), mas durante o processo de ensino, não apresentam a relação entre os diferentes registros de representação, sendo que alguns desses registros são predominantes na prática docente (REZENDE, 2011).

Devido à importância das produções científicas sobre o conhecimento do professor de Matemática e o ensino de Funções para a melhoria da aprendizagem escolar, nos questionamos: Quais as principais características das pesquisas científicas com foco no conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica? Quais domínios e subdomínios do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (*Mathematics Teachers' Specialized Knowledge)* estão presente nessas pesquisas? Como essas pesquisas contribuem para o conhecimento especializado de professores de Matemática?

OBJETIVO GERAL E ESPECÍFICOS

O objetivo geral da pesquisa foi realizar um mapeamento da produção científica relativa ao conhecimento docente para o ensino de Funções na educação básica no período entre 2015 e 2020. E como objetivos específicos temos:

1. Identificar quais as principais características das pesquisas científicas com foco no conhecimento docente para o ensino de Função (foco/objetivo, fundamentação teórica, procedimentos metodológicos, nível de ensino, resultados e conclusões);
2. Analisar os domínios e subdomínios que estão presentes nas pesquisas sobre o conhecimento docente para o ensino de Função;
3. Identificar a contribuição das produções científicas analisadas para o conhecimento especializado de professores;
4. Sistematizar um conjunto de conhecimentos especializados para o ensino de Funções a partir da produção.

BREVE DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DAS SESSÕES

Esta dissertação contém quatro capítulos. No capítulo de Fundamentação Teórica apresentamos o modelo teórico do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) e o conceito e ensino de Funções em diferentes perspectivas. O terceiro capítulo refere-se à Metodologia utilizada no presente trabalho, apresentando o tipo de pesquisa, seu contexto, os procedimentos de coleta e de análise de dados. No quarto capítulo apresentamos as análises vertical e horizontal das produções e discutimos os resultados para respondemos os questionamentos da presente pesquisa e por fim, apresentamos nossas considerações finais.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

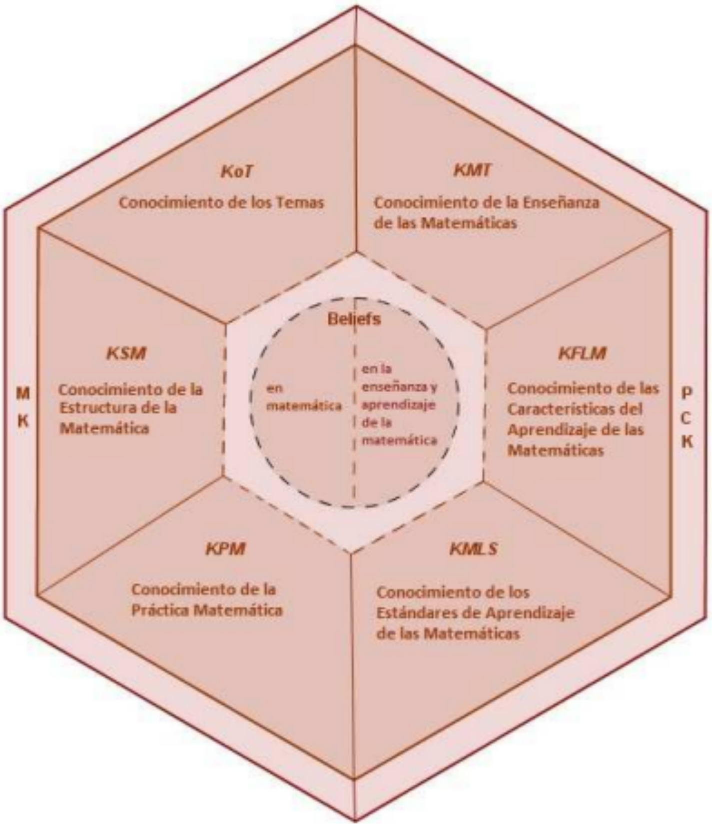
Este capítulo traz os referenciais teóricos da pesquisa sobre Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) e também sobre os conceitos, o ensino e a aprendizagem de Funções e seus aspectos didáticos.

1.1 MATHEMATICS TEACHERS' SPECIALIZED KNOWLEDGE

O *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO *et al.*, 2014) é um modelo teórico analítico que representa o conjunto de conhecimentos especializados que os professores podem ou devem mobilizar para ensinar e fazer aprender Matemática, de modo que sua especificidade faz sentido apenas para a atividade de tais profissionais (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018; ARAUJO, 2018). O modelo surgiu na Espanha, na qual um grupo de pesquisadores liderados por José Carrillo buscaram superar as limitações de modelos anteriores, procurando garantir que a definição de cada subdomínio fosse construída a partir do que o professor usa e/ou precisa para ensinar Matemática de modo que evite a sobreposição de subdomínios (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018).

O MTSK é composto por dois domínios: o Conhecimento Matemático (*Mathematics Knowledge* - MK) e o Conhecimento Didático do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* - PCK) e cada um desses domínios contém três subdomínios distribuídos em uma figura hexagonal e ao centro do modelo estão as crenças do professor sobre o conhecimento matemático e o conhecimento didático do conteúdo. As crenças permeiam os subdomínios e dão sentido às ações dos professores (MORIEL JUNIOR, 2014). O modelo é apresentado a seguir na Figura 1. Os domínios e subdomínios do modelo são apresentados com as siglas iniciais das palavras na língua inglesa para facilitar as traduções.

Figura 1. Modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK)



Fonte: Carrillo *et al.* (2014).

A seguir, apresentamos os domínios, subdomínios e categorias do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK).

- Conhecimento Matemático (MK):

Este domínio considera o conhecimento matemático como uma disciplina científica e diferencia o conhecimento do professor de Matemática de outros usuários da disciplina, sendo composto por três subdomínios. Dentro dos subdomínios os conhecimentos podem ser classificados de acordo com suas categorias que apresentaremos a seguir.

O Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) integra o conhecimento que se espera que o estudante aprenda sobre um determinado tópico a ser ensinado, considerando que o nível de profundidade de conhecimento do professor pode ou deve ser maior do que aquele em que se espera que o estudante alcance. Este subdomínio contém as categorias de fenomenologias e aplicações, registros de representação, definições, propriedades e seus fundamentos e procedimentos.

A categoria de fenomenologias e aplicações envolve o conhecimento do professor sobre modelos que podem ser atribuídos a um determinado tópico, podendo servir para gerar conhecimento matemático, entre eles os que aparecem na gênese do conceito. As definições, propriedades e seus fundamentos são conhecimentos atribuídos a um tópico particular, em que "o professor reconhece as definições e como escolher o conjunto apropriado de propriedades para caracterizar objetos matemáticos" (CARRILLO-YAÑEZ, 2018, p. 12, tradução nossa). Os registros de representação referem-se ao conhecimento do professor sobre as diversas formas de representar um determinado tópico. E, por fim, a categoria de procedimentos, na qual considera-se os algoritmos convencionais e alternativos, as condições para proceder e as características que tenderiam o objeto resultante em relação a um determinado tópico (CARRILLO *et al.*, 2014).

O Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) é o conhecimento que o professor tem sobre a conexão entre diferentes tópicos da Matemática no mesmo ou em diferentes níveis de ensino e entre tópicos da Matemática com outras áreas afins. São atribuídas a este subdomínio as categorias de conexão de complexidade, conexões de simplificação, conexão de conteúdos transversais e conexões auxiliares.

A categoria de conexão de complexidade são os conhecimentos utilizados ao fazer uma conexão do conteúdo está sendo ensinado com a finalidade de potencializar outros conteúdos que serão ensinados posteriormente. As conexões de simplificação são os conhecimentos relativos a tópicos estudados anteriormente pelos estudantes e que poderão servir para potencializar o ensino de um determinado conteúdo que está sendo ensinado. A categoria de conexões auxiliares inclui o conhecimento sobre um conteúdo que pode servir como um elemento auxiliar para o outro. Por fim, a categoria de conexão de conteúdos transversais "não são conexões de conteúdo mais simples ou mais complexo entre si, mas há uma qualidade comum naqueles que o relaciona, e os modos de pensamento associados com esses temas contemplam essa característica comum" (CARRILLO *et al.*, 2014, p.79, tradução nossa).

O Conhecimento da Prática Matemática (KPM) destaca a importância de que o professor não conheça só os resultados matemáticos, mas também as diferentes formas que se chegam a eles, conhecendo a construção matemática de um determinado tópico. Assim, o KPM é o conhecimento do professor sobre as formas de explorar, proceder e generalizar o conhecimento matemático (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018). "Corresponden al KPM conocimientos sobre cómo se argumenta o demuestra en matemáticas la importancia del lenguaje formal, la simbología y la sintaxis matemática, entre otros" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 309). Este subdomínio se refere ao metaconhecimento relativo ao fazer matemático (definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar):

> O KPM também consiste em saber explorar e gerar novos conhecimentos em matemática e dar substância aos saberes dos professores, permitindo-lhes administrar o raciocínio matemático posto em prática por seus alunos, aceitando, refutando ou refinando-o conforme necessário (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018, p. 17, tradução nossa).

- Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK):

O Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM) envolve os conhecimentos sobre as características de aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Para este subdomínio são atribuídas as categorias de teorias de aprendizagem, potencialidades e dificuldades de aprendizagem, interação dos estudantes com o conteúdo e aspectos emocionais de aprendizagem matemática.

Na categoria teorias de aprendizagem está o conhecimento que o professor tem sobre possíveis modos de aprendizado do mesmo conteúdo. Também se inclui o conhecimento da estrutura do desenvolvimento cognitivo do estudante. Quanto a categoria potencialidades e dificuldades de aprendizagem, envolve o conhecimento sobre erros, obstáculos e dificuldades associadas à matemática em geral e a temas concretos e também ao conhecimento das vantagens ou potencialidades que podem aproveitar para a aprendizagem. A categoria de interação dos alunos com o conteúdo matemático refere-se ao conhecimento do professor sobre processos e estratégias dos estudantes, além disso, envolve o conhecimento sobre possíveis linguagens ou vocabulários ao abordar um determinado conteúdo. Já o quesito aspectos emocionais de aprendizagem matemática envolve o conhecimento do professor sobre coisas cotidianas que motivam os alunos, suas expectativas em Matemática e seus interesses (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018).

No Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) estão os recursos, materiais, modos de apresentar o conteúdo e o potencial que podem ter para instrução durante o processo de ensino, contendo as categorias de teorias de ensino, recursos de ensino e estratégias, técnicas, tarefas e exemplos.

As teorias de ensino se referem ao conhecimento das teorias específicas da educação Matemática, como o uso de analogias, exemplos típicos, metáforas e explicações. Na categoria de recursos de ensino está o conhecimento do professor sobre recursos materiais e virtuais para ensinar matemática e os benefícios e dificuldades associadas ao uso desses recursos como apoio para o ensino de um determinado conteúdo (livros de textos, planilhas eletrônicas, tangram, *softwares*) e o reconhecimento de um recurso ou ferramenta pedagógica motivadora de atitudes positivas de trabalho dos estudantes. E as estratégias, técnicas, tarefas e exemplos se referem ao conhecimento de como se denota a intencionalidade de ensino do professor do objeto material ou virtual em si e em que momento os usar e conhecer uma atividade específica para potencializar a aprendizagem do conteúdo matemático.

Por fim, o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS) que se refere ao conhecimento que o professor tem a respeito do nível conceitual estipulado com que se espera que o aluno aprenda em um determinado nível escolar. Fazem parte deste subdomínio as categorias de resultados esperados de aprendizagem, nível de desenvolvimento conceitual ou procedimental esperado e sequenciação de tópicos.

A categoria de resultados esperados de aprendizagem se refere ao conhecimento dos documentos curriculares, conhecimento das habilidades e competências a serem desenvolvidas em cada etapa de ensino. Na categoria nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado está o conhecimento sobre qual tipo de abstração pode fazer um estudante em determinada etapa escolar, ou seja, deve-se conhecer o que o aluno pode/deve alcançar. Na sequenciação de tópicos se diz respeito aos conhecimentos prévios dos alunos para enfrentar determinadas tarefas e também conhecer suas potencialidades que devem desenvolver um determinado tópico.

O MTSK pode ser considerado uma ferramenta importante para a investigação analítica do conhecimento científico e especializado de professores de Matemática (MORIEL JUNIOR; ALENCAR, 2020) e seus subdomínios mostram-se eficientes para descrevê-lo (MORIEL JUNIOR, 2021). Considerando que o professor mobiliza ou deve mobilizar conhecimentos que contemplem os diferentes subdomínios do referido modelo teórico, professores formadores podem fazer o uso dos subdomínios e categorias do MTSK para treinar os professores em formação (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018).

1.2 ENSINO DE FUNÇÕES

Ao longo da história, muitos problemas demoravam anos para serem resolvidos pelos matemáticos, mas com os avanços da álgebra, os símbolos tornaram as coisas mais concisas (ARCAVI, 1995). A evolução dos conceitos de Função ocorreu de forma lenta ao longo da história e, desde o seu surgimento com os babilônios e gregos, influenciaram para que os Matemáticos tivessem dificuldades epistemológicas (LIMA, 2013). A sua origem se deu a partir de um problema prático com referência na realidade, à medida que novos problemas surgiam, tais conceitos não eram mais suficientes e então as limitações das definições ficavam mais explícitas, necessitando obter avanços, exigindo mais clareza, precisão e generalização (SANTOS DE SOUZA; SOUZA, 2018).

Neste sentido, não se pode esperar que os estudantes internalizem tais conceitos de forma imediata, desta forma o raciocínio desses alunos deve ser levado em consideração de modo que os professores possam auxiliá-los na construção de seu conhecimento. Portanto, o professor não pode esperar que o estudante tenha a mesma maturidade intelectual e habilidade dos matemáticos, tampouco abusar do uso de símbolos que não façam sentido algum para eles:

> A maturidade intelectual dos matemáticos que lhes permite trabalhar sem parar para questionar o status ontológico dos objetos que manuseiam e, assim, manuseá-los livremente, não pode ser esperado dos alunos. No entanto, em muitas salas de aula hoje, vemos a inversão antididática de Freudenthal: empurrar símbolos sintáticos e sem sentido é a principal atividade do aluno em álgebra (ARCAVI, 1995, p.147, tradução nossa).

Olhar para o passado e para as evoluções da álgebra pode contribuir com o aumento da sensibilidade dos professores de Matemática em relação aos diferentes raciocínios utilizados por seus alunos, pois muitas vezes o professor espera que o aluno compreenda de maneira imediata e apresente o conceito e/ou as definições formais de Funções de maneira exata, descartando, assim, seus primeiros raciocínios (ARCAVI, 1995). Assim, conhecer o processo de construção da Matemática para validar possíveis raciocínios e procedimentos dos alunos durante as resoluções de problemas pode contribuir com o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Nesse sentido, Benedito e Bernardes (2019) aproveitam os aspectos históricos sobre a evolução dos conceitos de Função para elaborar uma proposta didática com o uso de metarregras do discurso na qual seus estudantes refletem sobre diferentes definições de Funções ao longo da história, comparando-as e percebendo a sua evolução até a definição atual. No estudo realizado, os autores perceberam que ao final das atividades foi possível uma melhor compreensão do conceito por parte dos estudantes e os mesmos passaram a perceber que Função não está associada apenas a uma fórmula ou lei de formação, e passaram a utilizar diferentes registros de representação como, por exemplo, os gráficos e o diagrama de Venn. Além disso, foi desconstruída a imagem da Matemática como uma ciência pronta e acabada.

No que diz respeito à definição de Função, Santos de Souza e Souza (2018) apresentam as três ideias básicas para defini-la, sendo elas como uma relação entre quantidades variáveis, como uma relação entre conjuntos e como uma transformação. A primeira, refere-se à ideia de grandezas que variam uma dependendo da outra. A segunda, parte da ideia de que para cada elemento de um conjunto (conjunto de partida) associa-se um único elemento do outro conjunto (conjunto de chegada). E a terceira, é a ideia de que uma função transforma o valor dado em um outro valor.

É necessário reconhecer que Função é uma relação entre elementos que podem ocorrer de várias maneiras, sendo elas:

> [...] relações (binária, correspondência, associação, proporcional, dependência e interdependência), em que sejam A e B conjuntos (subconjunto dos números reais), de modo que x pertence a A e y pertence a B, então se, e somente se, todos os elementos de A, possuam um correspondente, uma associação, um dependente, um interdependente em B, ou seja, para cada x existe um único correspondente em y (ARAUJO, 2018, p.32).

Variação entre duas ou mais variáveis: "Uma variável assume o papel de independente e a(s) outra(s) de variável(is) dependente(s)" (ARAUJO, 2018, p. 33).

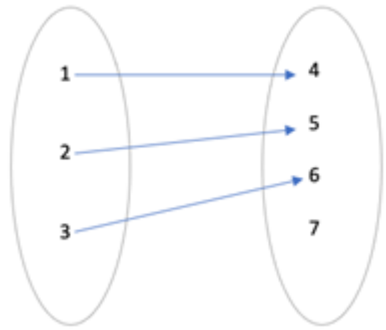
Relação de interdependência: é uma relação que existe entre a entrada e saída de uma máquina que consiste em um processo de transformação no qual, ao entrar uma grandeza em nessa máquina, a mesma passa por um processo de transformação e resulta na saída de outra grandeza.

Relação de dependência: sejam os conjuntos A de entrada e B de saída, para cada elemento que pertença ao conjunto A, existe um único elemento que pertença ao conjunto B, no qual existe uma relação de dependência entre as grandezas de entrada com as grandezas de saída (*input – output*) (ARAUJO, 2018).

Relação de interdependência – dependência: para cada elemento do conjunto do domínio (denotado D(f)), existe um único elemento do conjunto do contradomínio (denotado CD(f)) que através de uma correspondência, resulta no conjunto imagem (denotado Im(f)). O conjunto Im(f) é subconjunto de CD(f).

Uma Função pode ser classificada como injetora, sobrejetora ou bijetora. Essas propriedades também servem como agentes de definição do conceito de Função (ARAUJO, 2018). Uma função de A em B é injetora se para cada elemento tiver uma imagem distinta. Por exemplo, dados os conjuntos A e B (Figura 2), a função é injetora, pois cada elemento do conjunto do domínio (A) possui um correspondente distinto no conjunto do contradomínio (B).

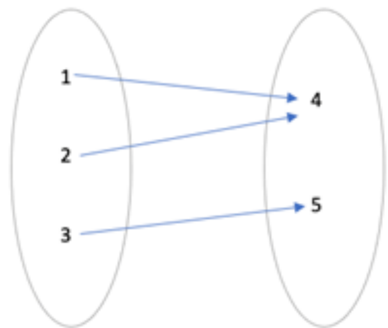
Figura 2. Função injetora



Fonte: Produzida pelo autor (2021)

Uma função é sobrejetora se, e somente se, o conjunto imagem for igual ao conjunto do contradomínio, ou seja, Im(f) = CD(f). Exemplo: sejam os conjuntos A e B (Figura 3), a Função é sobrejetora, pois, todo elemento que pertence ao contradomínio, pertence também ao conjunto imagem.

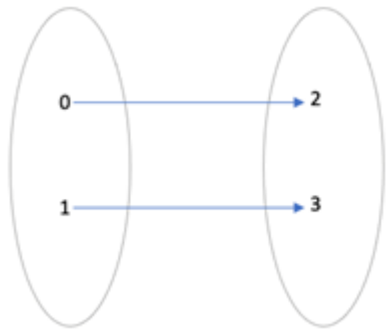
Figura 3 - Função sobrejetora



Fonte: Produzida pelo autor (2021).

Uma função é classificada como bijetora se ela for, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. Exemplo: sejam os conjuntos A e B (Figura), a Função é bijetora, pois cada elemento possui um correspondente ao mesmo tempo que todos os elementos do contradomínio também pertencem ao conjunto imagem.

Figura 4. Função bijetora



Fonte: Produzida pelo autor (2021).

O conceito de Função é unificador, pois depende apenas das noções intuitivas de relação, univocidade e conjunto. É estruturante porque participa e está no fundamento de todas as áreas e é articulador, uma vez que, os conceitos conectam a Matemática internamente e também a Matemática e outras áreas da Ciência (GARCIA, 2009). Apesar destes conceitos serem aprofundados no Ensino Médio, pode-se observá-los em outras etapas escolares como, por exemplo, no Ensino Fundamental, onde existe a conexão de Funções com operações aritméticas (ARAUJO, 2018). O autor destaca que “a multiplicação como soma de fatores iguais permite a conexão da multiplicação com a ideia de proporcionalidade, que se relaciona com um dos sentidos e significados de Função” (ARAUJO, 2018, p. 35), como exemplo descrito na Tabela 1.

Tabela 1. Tabuada do número 6

Multiplicador	Multiplicando	Processo	Produto
1	6	6	6
2	6	6 + 6	12
3	6	6 + 6 + 6	18
4	6	6 + 6 + 6 + 6	24
...	...	...	...
X	6	x*6	6x

Fonte: Araujo (2018, p. 35).

No Ensino Médio, as Funções se conectam com os temas de equações, relações, variações e sequências. Por sua vez, no Ensino Superior, se relacionam com conteúdos matemáticos mais complexos, como, por exemplo nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear (ARAUJO, 2018).

Além de ser abordado em diferentes níveis de ensino na Matemática, os conceitos de Função podem ser observados em diferentes áreas (LIMA, 2013; BENEDITO; BERNARDES, 2019), como, por exemplo, no crescimento populacional em Geografia, no crescimento de seres microscópios em Biologia, na radioatividade em Química e na cinemática e movimento uniformemente variado em Física (ARAUJO, 2018).

Um dos problemas do ensino de Funções está na relação entre os seus diferentes registros de representação (FONTE, 2002; ARAUJO, 2018), o que pode ser um reflexo da forma como os professores abordam o conteúdo em sala de aula, levando em consideração que a maioria dos professores apresentam a sua definição apenas como uma relação entre conjuntos e em suas práticas de ensino predominam as representações algébricas, diagrama de flechas e gráficas. Destaca-se que alguns professores sentem a necessidade de representar as Funções no contexto algébrico, seja como conjunto de pares ordenados ou por uma lei de formação (REZENDE, 2011).

As mesmas dificuldades são destacadas por Lima (2013), em que a autora relata que em cursos superiores nas disciplinas de Introdução ao Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral, os estudantes relacionam o conceito de Função com Equação e muitas vezes sentem dificuldades em relacionar suas diferentes formas de representação bem como suas transformações, essa dificuldade ocorre principalmente na transformação gráfica para a algébrica. Tais dificuldades podem ser comprometedoras se tratando de alunos de Licenciatura, pois os mesmos retornarão para as salas de aula despreparados para ensinar o referido tema.

Algumas dificuldades e concepções errôneas por parte dos estudantes são citadas por Fonte (2002), sendo elas a compreensão das diversas representações e suas relações, aceitar que uma Função deve sempre ser representada por uma lei de formação, associações de equações $x = k$ e $y = k$ aos seus respectivos gráficos de retas verticais e horizontais, a não aceitação de Funções constantes, compreensão dos significados dos parâmetros algébricos no contexto geométrico e compreensão da afirmação da conexão cartesiana. Por sua vez, Araujo (2018) cita as dificuldades dos estudantes em reconhecer e utilizar as notações padrão para grandezas dependente e independente, compreenderem as raízes de uma Função como coordenadas no gráfico, classificar uma função como injetora, sobrejetora e bijetora e analisar o crescimento e decrescimento de uma Função a partir de seus registros de representação.

Se por um lado as situações apresentadas anteriormente são um desafio no ensino de Funções, existem algumas potencialidades na aprendizagem dos estudantes que podem ser exploradas pelos professores durante o ensino do referido tema, são elas:

> [...] relacionar os registros de representação de diagrama de flechas com tabular e gráfico, utilizar a ideia intuitiva do conteúdo, de função como uma máquina para compreender Função como uma relação de dependência-interdependência entre as grandezas e trabalhar a conexão do tema de Funções com outros tópicos como equações, proporcionalidades, relações, variação, entre outros tópicos (ARAUJO, 2018 p. 39).

A sequência didática de definição–exemplo–exercício não pode ser a única utilizada no ensino de Funções, pois essa ideia pode prejudicar a aprendizagem do aluno. Portanto, é importante que o professor proporcione um ambiente rico em representações, mostrando os prós e os contras de cada uma delas, levando os estudantes a entenderem que todas as suas representações são diferentes fontes de informação sobre o conceito de Função (SANTOS DE SOUZA; SOUZA, 2018). Os registros de representação de uma Função são verbal, algébrico, dados tabelados (tabular), diagrama de Venn (diagrama de flechas), gráficos (SOUZA, 2016) e pictóricos (ARAUJO, 2018). Tais representações são meios de comunicação dos conceitos de Função, e devem ser utilizadas para auxiliar a compreensão de suas definições (SANTOS; BARBOSA, 2017). A seguir, apresentamos cada uma dessas representações e daremos exemplos de acordo com Souza (2016) a partir do problema utilizado pelo autor:

> Um motorista de táxicobra R$5,07 de bandeirada mais R$1,26 por quilômetro rodado. Caso o táxi chegue na casa do cliente e haja desistência, o cliente deverá pagar a bandeirada. Sabendo que o preço a pagar é dado em função do número de quilômetros rodados, calcule o preço a ser pago por uma corrida em que se percorreu 22 quilômetros (SOUZA, 2016, p. 21).

Lei de formação: a lei de formação é também conhecida como representação algébrica. Esta representação define exatamente como uma Função deve ser representada através de sua regra Matemática, por exemplo, a função registrada verbalmente no parágrafo anterior tem a representação algébrica como $f(x) = 1{,}26x + 5{,}07$, onde $f(x)$ é o valor a ser pago em função de x (quilometragem rodada).

A expressão algébrica contribui para reconhecer relação de dependência de variáveis, reconhecer e definir tipos de relações funcionais e operar com as relações funcionais. Entretanto, pode dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não podem ser representadas algebricamente (SANTOS; BARBOSA, 2017).

Dados tabelados: a representação tabular apresenta geralmente números em forma sistemática em linhas e colunas. Na figura 5 está a representação tabular de alguns valores da corrida em função da quilometragem rodada.

Figura 5. Representação tabular

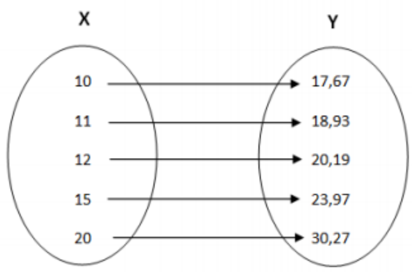
km rodados	*Preço a pagar (R$)*
10	*17,67*
11	*18,93*
12	*20,19*
15	*23,97*
20	*30,27*

Fonte: Souza (2016, p. 22).

A representação tabular possibilita identificar as variáveis dependente e independente, reconhecer a noção de variação e identificar relações lineares. Entretanto, pode caracterizar erroneamente o tipo de relação funcional (SANTOS; BARBOSA, 2017).

Diagrama de Venn: Este diagrama de flechas possibilita a visualização de propriedades e relações entre conjuntos finitos.

Figura 6. Diagrama de Venn

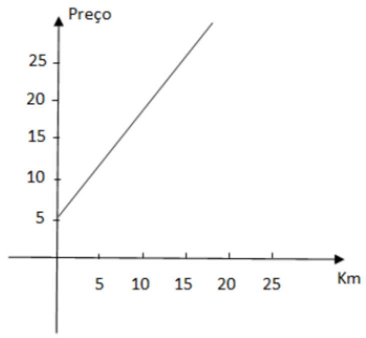


Fonte: Souza (2016, p. 22).

O diagrama apresenta a relação entre os conjuntos de entrada e saída, de modo que, cada elemento do conjunto de entrada corresponda a um único elemento do conjunto de saída, tal relação é indicada pelas flechas. Esta representação possibilita identificar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma relação funcional e também reconhecer se a relação funcional é invertível (SANTOS; BARBOSA, 2017).

Gráficos: os gráficos expressam visualmente dados ou valores numéricos a partir de pares ordenados, facilitando a compreensão dos mesmos: "[...] O gráfico de uma função $f: X \to Y$ é o conjunto dos pares ordenados em X x Y da forma $(x, f(x))$, ou seja, $\big(x, f(x)\big) : x \in X$. Uma função é representada pelo seu gráfico e pela especificação do conjunto de chegada" (SOUZA, 2016, p. 22).

Figura 7. Representação gráfica



Fonte: Souza (2016, p. 23).

A representação gráfica favorece o reconhecimento da noção de variação e dependência entre variáveis e possibilita caracterizar e reconhecer algumas características da relação funcional (zeros, sinais, injetividade e monotocidade). Entretanto, pode dificultar a compreensão de relações funcionais que não podem ser representadas graficamente (SANTOS; BARBOSA, 2017).

Outra forma de comunicar o conceito de Função é através da Função como uma máquina de transformação que se configura também em uma forma de introduzir o conceito de Função no ensino e também é possível utilizá-la para a introdução da definição dos conjuntos de entrada e saída, que são fundamentais para caracterizar relações funcionais (SANTOS; BARBOSA, 2017). Os autores também destacam a comunicação de Função como generalização que é "expressar em linguagem corrente ou usando símbolos algébricos uma afirmação geral que explicita a dependência entre variáveis de uma relação funcional, tendo como base alguns dados dessa relação" (SANTOS; BARBOSA, 2017, p. 33).

No ensino de Funções é importante que o professor de Matemática faça o uso de tarefas diferenciadas e utilize materiais manipuláveis, *softwares* e tecnologias de informação e comunicação, bem como se apropriar de tarefas investigativas para que os estudantes possam explorar os conceitos de Função e as conexões entre os seus diferentes registros de representação. Tais aspectos correspondem ao conhecimento do professor sobre estratégias de ensino de Matemática (ARAUJO, 2018).

De acordo com o referencial teórico, apresentamos alguns exemplos dos subdomínios do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) para o ensino de Funções. O Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) consiste em saber, por exemplo, que uma Função pode ser classificada como injetora, sobrejetora ou bijetora e que uma Função é uma relação que pode ser definida de diversas formas (ARAUJO, 2018). Também se incluem o conhecimento sobre suas diferentes representações (verbal, algébrica, numérica, tabular, gráfica e pictórica), bem como reconhecer aplicações de seus conceitos, como, por exemplo, determinar o valor a ser pago em um estacionamento privado em função do tempo de uso do estacionamento e utilizar a situação para produzir conhecimento matemático.

O Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) diz respeito ao seu conhecimento sobre os conceitos de Função que são implícitos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como, por exemplo, no estudo das operações básicas e da tabuada (ARAUJO, 2018), ou que aparecem também em outros tópicos na etapa final do Ensino Fundamental, como as equações e durante o Ensino Médio, em sequências, progressões aritméticas e progressões geométricas. Seus conceitos também se conectam a outras disciplinas, como a Biologia, a Química e a Física (BENEDITO; BERNARDES, 2019) e são relevantes em diversas disciplinas no Ensino Superior, como nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear.

Um exemplo do Conhecimento da Prática Matemática (KPM**)** de professores de Matemática no ensino de Funções é o conhecimento do professor para generalizar informações que correspondem ou não a uma relação Funcional através de demonstrações matemáticas como os contraexemplos (ARAUJO, 2018). Segundo o autor, também se enquadram neste subdomínio o conhecimento sobre o método de demonstrar algumas leis de formação, fórmulas e propriedades de Função.

O Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM) inclui reconhecer que os estudantes encontram dificuldades para identificar relações funcionais que não são representadas na forma algébrica (FONTE, 2002; SANTOS; BARBOSA 2017), e também que o aprendizado do aluno pode ser potencializado ao relacionar os registros de representação de diagrama de flechas, tabular e gráficos, assim como associar a Função ao processo de uma máquina. Também se destacam como pontos fortes as analogias de Funções com o funcionamento de uma máquina (ARAUJO, 2018).

No subdomínio Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) o conhecimento do professor está relacionado, por exemplo, a reconhecer a importância de se utilizar exemplos, tarefas diferenciadas e investigativas e também fazer o uso de *softwares* para auxiliar na compreensão das diferentes representações de uma Função (ARAUJO, 2018), ou ao ensino do referido tema utilizando a metodologia de contextualização como uma alternativa para superar as dificuldades dos estudantes (SILVA; OLIVEIRA, 2017).

Por fim, o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS) se refere ao conhecimento relativo aos tópicos matemáticos que foram e/ou serão ensinados em uma determinada etapa de escolarização e também as suas orientações curriculares (ARAUJO, 2018), como, por exemplo, saber que para o estudante obter êxito na aprendizagem de Funções é preciso ter conhecimento prévio sobre o tema de Equações.

2 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Neste capítulo apresentamos a natureza (VILAÇA, 2010), o tipo (BICUDO, 2014; BOGDAN, 1994) e a abordagem metodológica da pesquisa (KOHLS-SANTOS; MOROSINI, 2021), bem como o contexto e os documentos selecionados que compõem seu *corpus*, as etapas, técnicas de coleta e a análise de dados, contendo os aspectos de análise dos documentos (GUMIERO; PAZUCH, 2020) e o instrumento iMTSK utilizado para analisar o conhecimento especializado de professores (MORIEL JUNIOR, 2021).

2.1 NATUREZA DA PESQUISA

Quanto à natureza, a pesquisa é bibliográfica, uma vez que visa discutir a revisão da literatura sobre o conhecimento do professor de Matemática para o ensino de Funções na Educação básica analisando documentos científicos em forma de artigo (VILAÇA, 2010). A abordagem é qualitativa, pois os dados são analisados em toda a sua riqueza, respeitando as formas em que os registros foram escritos (BOGDAN; BLIKEN, 1994).

Quanto à abordagem metodológica, trata-se do Estado do Conhecimento, visando a melhor compreensão da produção científica sobre a referida área através do mapeamento e da sistematização dos artigos científicos no período entre 2015 e 2020 (KOHLS-SANTOS; MOROSINI, 2021).

Em relação à natureza, segundo os objetivos do presente trabalho, o estudo é caracterizado como analítico-descritivo (ROMANOWSKI; EANS, 2006), realizado a partir do levantamento bibliográfico e revisão da produção científica sobre o conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica.

2.2 CONTEXTO E DOCUMENTOS DA PESQUISA

A fonte de informações utilizada para a presente pesquisa é a base de dados *Web Of Science,* combinando palavras-chave que contemplem a temática em questão e utilizando o operador "AND" para encontrar os documentos desejados a fim de realizar a leitura dos títulos, resumos e palavras-chave. Escolhemos a *Web Of Science* por conter uma grande quantidade de pesquisas mundiais na área da educação (GUMIERO; PAZUCH, 2020). As palavras-chave utilizadas para o levantamento bibliográfico serão apresentadas posteriormente na seção de obtenção de dados, bem como o número de artigos encontrados e selecionados para análise.

O tipo de documento a ser analisado nesta pesquisa são os revisados por pares e publicados em periódicos, sendo eles os artigos indexados na referida base de dados que contemplassem as combinações de palavras-chave e descritores utilizados durante a busca realizada entre os meses de março e abril de 2021.

O universo de documentos de interesse são artigos científicos desenvolvidos sobre o conhecimento docente para o ensino de Funções, publicados entre os anos de 2015 e 2020. O recorte se deve a quantidade de produções indexadas na base de dados em relação ao tempo de realização da pesquisa e escolhido baseado em estudos antecedentes que revisaram produções em anos anteriores.

Como critérios de delimitação da amostra do material, além do recorte temporal (2015 – 2020) para reduzir o número de amostras a serem analisadas devido ao tempo hábil de pesquisa, outro critério utilizado antes de realizar a busca foi excluir as produções científicas que tratavam de outras temáticas que não Funções, ou então, que não se tratavam do conhecimento do professor de Matemática para ensinar o referido tema na Educação Básica.

2.3 SOBRE A OBTENÇÃO DE DADOS

- **Técnica de coleta:**

Utilizamos como descritores as palavras-chave: 1. (*Teaching, Knowledge, Functions, Mathematics*), 2. (*Teachers' Mathematics Knowledge AND Concept Functions*), 3. (*Teacher Mathematics Knowledge AND Functions*), 4. (*Mathematics Teacher Knowledge for teaching function*) e 5. (*Teacher Mathematics Knowledge* "AND" *Teaching Functions*).

- **Etapas da coleta de dados:**

Primeiro realizamos um levantamento bibliográfico utilizando os descritores mencionados anteriormente para um levantamento exploratório da produção relativa ao conhecimento do professor de Matemática para ensinar o tema de Funções. Em seguida, excluímos as produções que estavam fora do período pré-estabelecido (2015 – 2020). Das produções restantes, foram feitas as leituras de títulos, resumos e palavras-chave com a finalidade de definir se o artigo faria ou não parte do *corpus* de análise. Apresentamos na Tabela 2 a distribuição das produções científicas.

Tabela 2. Distribuição das produções científicas por descritores

Número do descritor	Descritores	Número de artigos encontrados	Número de artigos (2015 – 2020)	Excluídos por		Artigos selecionados
				Período	Temática	
1	*Teaching, Knowledge, Functions, Mathematics*	444	271	173	265	6
2	*Mathematics Knowledge AND Concept Functions*	100	60	40	54	6
3	*Teacher Mathematics Knowledge AND Functions*	380	228	152	225	3
4	*Mathematics Teacher Knowledge for teaching function*	183	124	59	121	3
5	*Teacher Mathematics Knowledge AND Teaching Functions*	103	63	40	59	4

Fonte: Produzida pelo autor (2021).

Posteriormente, identificamos os artigos que compõem o *corpus* da presente pesquisa descartando as repetições de trabalhos que foram encontrados em diferentes descritores. Fazem parte do grupo de análise seis artigos que são listados no Quadro 1 contendo título (em português), autores e ano – e para facilitar a leitura optamos por codificar os artigos analisados conforme o quadro abaixo.

Quadro 1. *Corpus* de análise

Código	Título (em português)	Autor(a)(es)/Ano
A01	Conhecimento de conteúdo comum manifestado por um professor no ensino dos conceitos básicos de funções: um estudo de caso.	Ariana Rodríguez-Flores, Miguel Picado-Alfaro, Jonathan Espinoza-González, Nielka Rojas-González, Pablo Flores-Martínez (2016).
A02	Em direção a uma relação entre ETS e MTSK através do conceito de função.	Espinoza-Vásquez, G.; Verdugo-Hernandez, P.; Zakarayan, D.; Carrillo, J. e Montoya-Degaldillo, E. (2016)
A03	Uso de analogia no ensino do conceito de função: relação entre o conhecimento dos tópicos e o	Gonzalo Espinoza-Vásquez, Diana Zakarayan, José Carrillo Yañez (2017).

	conhecimento do ensino da Matemática.	
A04	Conhecimento matemático para ensinar o conceito de função e resultados de aprendizagem do aluno.	Hatisaru, V. e Erbas, AK. (2017).
A05	Conhecimento especializado de professores de matemática: um estudo de caso sobre o ensino dos conceitos básicos de função.	Ariana Rodríguez-Flores, Miguel Picado-Alfaro, Jonathan Espinoza-González, Nielka Rojas-González (2018).
A06	Os conhecimentos especializados do professor de Matemática na utilização da analogia no ensino do conceito de função.	Gonzalo Espinoza-Vásquez, Diana Zakarayan, José Carrillo Yañez (2018).

Fonte: Produzida pelo autor (2021).

2.4 SOBRE A ANÁLISE DE DADOS

Quanto à análise de dados, realizamos uma adaptação de Gumiero e Pazuch (2020) na qual foram analisados separadamente os documentos na forma vertical dos seis aspectos que serão apresentados a seguir. Posteriormente, a partir das derivações desses aspectos, realizamos uma análise horizontal.

- **Etapas da análise de dados:**

A análise vertical contemplou cinco aspectos que contribuem para responder a primeira pergunta. Os aspectos analisados foram: (1) Foco de investigação – objetivo e/ou pergunta de pesquisa; (2) procedimentos metodológicos; (3) Referencial teórico; (4) nível de ensino; (5) resultados e conclusões; e (6) conhecimentos especializados que aparecem nas pesquisas. Diante dos resultados, buscamos as semelhanças e diferenças sistemáticas através de uma análise horizontal (GUMIERO; PAZUCH, 2020).

Para classificarmos os conhecimentos identificados nos artigos analisados, nos apropriamos do instrumento de análise de dados do MTSK – iMTSK (MORIEL JUNIOR, 2021) apresentado na Figura 8. O instrumento permite a classificação desses conhecimentos de acordo com as categorias e subdomínios do modelo analítico MTSK de Carrillo *et al.* (2014). A análise é feita a partir da descrição dos conhecimentos mobilizados pelos professores ou futuros professores de Matemática apresentados nos textos.

Figura 8. Instrumento de análise iMTSK

Dados	Análise do pesquisador		
Manifestação do sujeito	O sujeito manifestou conhecimento...	associado a...	que consiste em...
Trecho do episódio (Fonte, linha ou página)	[subdomínio]	[categoria]	[síntese do conhecimento][a]
[Exemplo] A aula de resolução de problemas termina quando eu sistematizo o conceito de Princípio fundamental da contagem a partir das soluções dos alunos sobre combinar calças e camisas. (Professora, 3-5)	*do ensino de matemática (KMT)*	*Teorias de ensino*	*uma das etapas da metodologia 'resolução de problemas' para ensinar o 'Princípio fundamental da contagem': sistematização do conceito 'a partir das soluções dos alunos sobre [o problema de] combinar calças e camisas'*

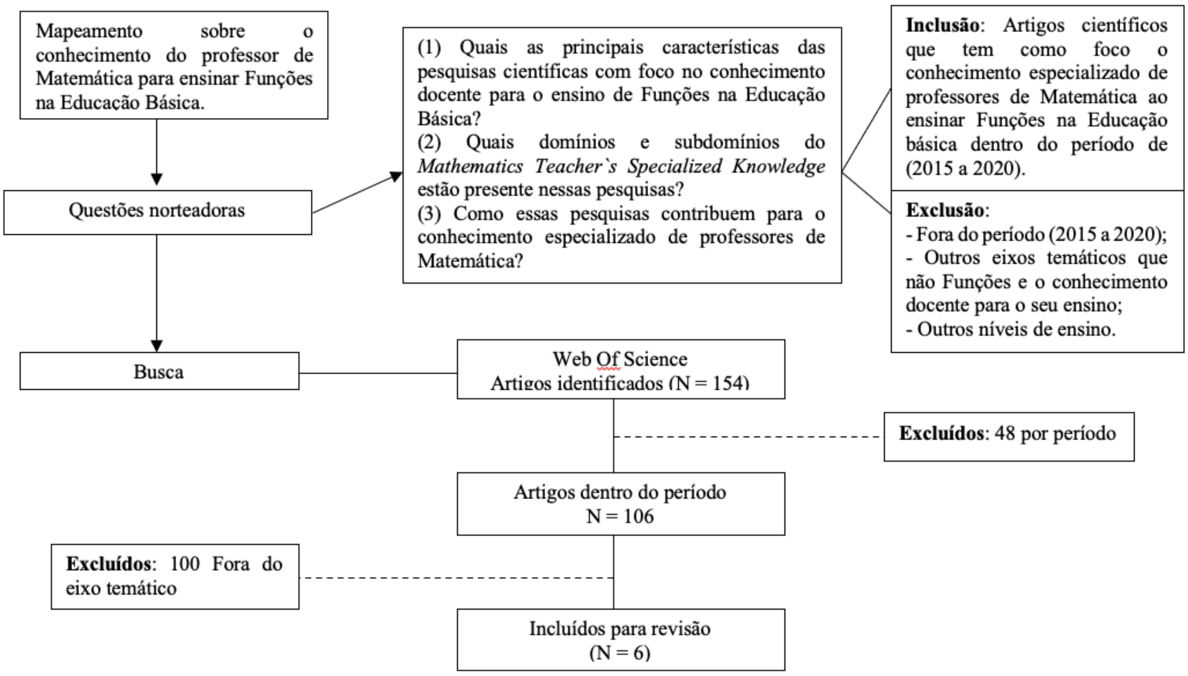
Nota: a. Inicia-se com um artigo (definido ou indefinido) ou um numeral (indicando a quantidade de conhecimentos), seguido pelo elemento central do conhecimento identificado (que não é uma ação), validando-o com citação dos dados. Cada trecho pode conter um ou mais conhecimentos, de um ou mais subdomínios e categorias, indicando suas conexões.

Fonte: Moriel Junior (2021, p. 200).

2.5 SÍNTESE DA METODOLOGIA

A Figura 9 apresenta uma síntese da metodologia da pesquisa.

Figura 9. Síntese da metodologia de pesquisa



Fonte: Produzida pelo autor (2021).

3 RESULTADOS

Este capítulo contém as análises vertical dos seis aspectos das produções selecionadas e a análise horizontal de tais aspectos derivados.

3.1 ANÁLISE VERTICAL

O A01 tem como objetivos descrever o processo de Ensino, identificar os componentes do conteúdo e determinar indicadores sobre o conhecimento do conteúdo que caracterizam um professor de Matemática que ensina os conceitos básicos de função. Os autores realizaram um estudo de caso qualitativo em uma escola na Costa Rica, na qual os dados foram obtidos a partir da gravação de vídeo de seis aulas envolvendo um professor do Ensino Médio que tinha experiência de pelo menos cinco anos ensinando funções neste nível de ensino e que conhecia as mudanças curriculares. Foram considerados seis episódios, no qual investigou-se o conhecimento do professor ao ensinar os conceitos básicos de função, utilizando as categorias de análise do subdomínio Conhecimento Comum do Conteúdo do modelo *Mathematics Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball e seus colaboradores (2014).

De acordo com os dados, o professor introduziu os conceitos de Função através de um problema que, segundo os autores, se encontra dentro da realidade dos estudantes. Para a resolução deste problema, os estudantes foram divididos em grupos e, posteriormente, um aluno de cada grupo foi convidado para ir ao quadro apresentar suas respectivas resoluções. Assim, o professor validou as soluções e aproveitou as respostas erradas para conduzi-los no processo de ensino. Durante alguns episódios, também foram dados exemplos na lousa em que durante toda a observação o sujeito demonstra domínio dos conceitos de função, tanto em suas explicações, quanto em suas definições e representações.

O conhecimento utilizado para ensinar os conceitos básicos de função ao longo dos episódios contemplam todas as categorias do Conhecimento Comum do Conteúdo, sendo elas: Amplitude de Conceitos, Amplitude de Procedimentos, Precisão das Definições e Propriedades, Riqueza na Relação entre Conceitos, Atenção às Respostas dos estudantes e Domínio dos Conceitos Matemáticos. A seguir, apresentamos os conhecimentos especializados identificados no A01.

Quadro 2. Conhecimentos especializados identificados no A01.

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento**	**Associado a ...**	**Que consiste em ...**
Trecho	[Subdomínio]	[Categorias]	[Síntese do conhecimento]
O (professor A01) aplica uma tarefa sobre a tarifa do táxi na Costa Rica e enfatiza no cálculo do preço que envolve a tarifa e a quilometragem rodada, sendo ela inteira ou fracionária, o estabelecimento de uma lei de formação e a estimação de distâncias percorridas a partir do dinheiro disponível. A resolução do problema possibilitou a introdução de novos conceitos. (p. 8)	*Conhecimento do ensino da Matemática (KMT)*	*Estratégias, Técnicas, Tarefas e Exemplos*	*Uma [tarefa]que envolve variáveis dependente e independente no qual "o cálculo do preço envolve a tarifa e a quilometragem rodada".*
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	*Fenomenologias e aplicações*	*Uma [aplicação] de função em um contexto para facilitar a compreensão dos conceitos de variáveis dependente e independente.*
"Diremos que os elementos que formam uma relação serão chamados de pares ordenados, então aqui há um novo conceito, o que são pares ordenados? São aqueles elem... são aquelas associações que fazemos com os elementos de A e os elementos de B (Professor – A01, p. 9)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [relação] entre os elementos dos pares ordenados que será necessária para definir uma Função, em que pares ordenados são as "associações que fazemos com os elementos de A e os elementos de B".*
Sobre os procedimentos utilizados, o professor destaca uma maneira para identificar a variável dependente. "Ela está sozinha certo? Entre aspas, estar sozinho entre aspas, o que significa? Que essa variável é o que? Isolada certo? Veja que está completamente claro. Portanto, é uma maneira de identificar perfeitamente a variável dependente, é essa variável que é isolada na fórmula (Professor – A01, p. 10)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para encontrar a variável dependente em uma Função a partir da sua lei de formação, em que "a variável dependente, é essa variável que é isolada na fórmula".*

“Podemos especificar uma relação graficamente por meio de diagramas de Venn ou por meio de uma lista de pares ordenados que definem a relação, gráfico (Professor – A01, p. 10)”.	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Diferentes formas de [representar] uma Função (gráficos, diagrama de Venn e pares ordenados) no qual “podemos especificar uma relação graficamente por meio de diagramas de Venn ou por meio de uma lista de pares ordenados”.*
O (Professor – A01) utiliza a área da circunferência para mostrar as variáveis dependente e independente. “A área, né? Bem, a área vai depender do valor tirado por quem? O raio, no caso "r". Portanto, a área é a variável dependente, então ‘r’ seria a variável o quê? independente (p. 10)”.	*Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM)*	*Conexões auxiliares*	*Uma [conexão] entre o tópico de área da circunferência e o de Funções para identificar as variáveis dependente e independente, em que a área vai depender do valor do raio. “A área é a variável dependente, então r (raio) seria a variável independente”.*
O (Professor – A01) pergunta aos estudantes o motivo de um diagrama apresentado por ele não ser uma Função, após a resposta afirma: “O "3" está associado a dois elementos, que parte da definição não atende? Não cumpre a palavra única, então não é mais uma função. Sim, olha! E quero deixar claro, é uma relação e aqui podemos concluir algo importante. Toda função é uma relação o quê? mas nem toda relação corresponderá a uma função (p. 12)”.	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [propriedade] necessária para definir uma Função, em que “toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função”, considerando que o diagrama apresentado não atende a parte da definição, pois “o 3 (um elemento do domínio) está associado a dois elementos”.*
	Conhecimento da Prática Matemática (KPM)	*Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar*	*Uma [exemplificação] de uma relação que não corresponde a uma função.*
“Para identificar relações que correspondem a uma Função o professor explica que uma Função “é uma relação, tendo em conta que uma relação é uma associação entre elementos de dois conjuntos, como o companheiro disse anteriormente, mas uma relação que tem duas condições importantes, cada elemento, ou seja,	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [definição] de Função como uma relação de dependência na qual, “todos os elementos daqui (primeiro conjunto) tem que estar relacionado com um único elemento do segundo conjunto”.*

todos elementos daqui (aponta o primeiro conjunto) tem que estar relacionado com um único elemento do segundo conjunto. Uma relação com esta característica é o que vamos denominar, então, uma função entre dois conjuntos (Professor – A01, p. 11)".			
"O (Professor – A01) dita um problema para introduzir o cálculo de imagem e pré-imagem. O problema se trata do salário de um vendedor de revistas, onde y é o salário recebido e x é a quantidade de revistas vendidas para um salário particular (p. 12)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Fenomenologias e aplicações*	*Uma [aplicação] do tópico de Funções no cálculo do salário de um vendedor de revistas em que "o salário recebido (y) do vendedor depende da quantidade (x) de revistas vendidas" com a finalidade de abordar o cálculo da imagem e da pré-imagem de uma função..*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [tarefa] que tem como objetivo "introduzir o cálculo de imagem e pré-imagem".*
O (Professor – A01) ensina como determinar a imagem substituindo o valor da pré-imagem (variável independente) na Função. "O cálculo da imagem é uma simples substituição. Se substitui a variável independente pelo valor que estão me dando e já estou encontrando uma imagem (p. 12)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para determinar a imagem a partir de uma substituição da variável dependente no qual, "o cálculo da imagem é uma simples substituição".*
"Então cada par ordenado terá dois nomes, pré-imagem e imagem, variável dependente e independente, ou também podemos chamar de x-y que mais tarde veremos no plano cartesiano e para localizar os pontos no plano cartesiano sempre iremos manter essa ordem x vírgula y. (Professor – A01, p.12)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para encontrar os pares ordenados no plano cartesiano que "sempre iremos manter essa ordem x vírgula y".*
	Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS)	*Sequenciação de tópicos*	*Apresentar o conceito de pares ordenados sabendo que "mais tarde veremos no plano cartesiano para localizar os pontos".*
"Eles estão nos pedindo para descobrir o escopo dessa função. Escopo, isto é, eles estão nos pedindo o conjunto de	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para determinar o escopo de uma Função quando o seu domínio for formado por um conjunto finito de*

imagens. Viu que o domínio é composto de quantos elementos? (três) Portanto, para calcular o escopo, preciso calcular a imagem de cada um desses elementos, que será um subconjunto de quem? Dos números naturais, ou seja, cada uma dessas imagens deve ser um número natural (Professor – A01, p. 13)".			*elementos. "Portanto, para calcular o escopo, preciso calcular a imagem de cada um desses elementos".*
O desenvolvimento do último episódio se concentrou na construção do gráfico de uma Função. O (professor – A01) se concentrou em explicar aos seus estudantes como realizar o gráfico de uma Função dependendo de seu domínio. "Sempre que o domínio é dado por um conjunto finito de elementos, o gráfico da função vai ser unicamente a união dos pares ordenados (p. 14).	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Uma [representação] de Função, se concentrando na "construção gráfica".*
		Procedimentos	*Um [procedimento] para determinar o gráfico de uma Função que tem seu domínio formado por um conjunto finito de elementos, no qual o gráfico será formado pela "união dos pares ordenados".*

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

Os autores do A02 buscam fazer uma relação entre o Espaço de Trabalho Matemático (ETM) e o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) ao analisarem um episódio de aula, na qual um professor ensina os conceitos básicos de Função. Sua fundamentação se baseia em dois modelos teóricos, o Espaço de Trabalho Matemático (ETM) de Kuzniak (2011) e o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) de Carrillo *et al.* (2014), dos quais os autores relacionam os componentes do ETM com os subdomínios do MTSK para ampliar a perspectiva desses modelos e assim enriquecer a compreensão do conhecimento do professor de Matemática (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016).

A investigação foi realizada por um estudo de caso instrumental qualitativo, envolvendo um professor (Arturo) que possui dez anos de experiência na educação primária e secundária e sete anos no ensino superior. Além da experiência como docente, os autores destacam que Arturo é apontado como bom professor por seus colegas e superiores (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016). Os dados foram coletados a partir da gravação de vídeo e transcrição dos episódios para uma análise de conteúdo do conhecimento colocado em jogo pelo professor ao ensinar os conceitos básicos de Funções, sendo considerado apenas os momentos em que o professor propõe uma tarefa para calcular imagens e pré-imagens de Funções, buscando evidências dos modelos ETM e MTSK. Entretanto, não ficou evidente o nível em que o estudo foi realizado.

Neste estudo, Arturo determina a imagem e a pré-imagem de uma Função a partir de um diagrama de flechas e de sua expressão algébrica e ensina aos alunos como determiná-las por estimações (imagem) ou através de equações lineares (pré-imagem), mostrando o conhecimento de Arturo sobre o Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT), o Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) e Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016). Tais conhecimentos referem-se a representações, procedimentos, quando utilizá-los e às conexões auxiliares. Além disso, os autores destacam a intenção de Arturo em levar os seus alunos a um desequilíbrio cognitivo quando pede para eles determinarem a imagem e pré-imagem de uma Função, mostrando indícios de seu Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM).

Em relação ao ETM, ao utilizar o diagrama de flechas que mostram as flechas traçadas do conjunto de partida ao conjunto de chegada, o professor projeta o ETM idôneo, selecionando as representações, os exemplos e as explicações e incentivando as gêneses semióticas sobre as tarefas de determinação de imagens. Segundo os autores, o ETM idôneo "pretende ativar as gêneses semiótica com o uso das representações gráficas e algébricas" (ESPINOZA-VÁSQUES *et al.*, 2016, p. 202, tradução nossa) gerando uma mudança de domínio do cálculo (operações aritméticas) para a álgebra (manipulação de expressões algébricas).

Também é destacada a intenção de Arturo em incentivar a gênese instrumental ao propor uma forma geral para o cálculo da pré-imagem através da equação. São identificados os diferentes planos do professor para resolver um mesmo problema, o que, segundo os autores, evidencia aproximações distintas (semiótica e instrumental), privilegiando o plano vertical, no qual o professor coloca em jogo a descoberta e a exploração onde sinais e ferramentas se interagem. Na última intervenção de Arturo, os autores destacam o conhecimento sobre o referencial de acordo com a resolução de equações lineares, detalhando os procedimentos a serem seguidos para resolvê-la, de modo a considerar o conhecimento prévio de seus alunos, o que dá indícios de seu Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS) (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016).

Espinoza-Vásquez *et al.* (2016) evidenciam como o ETM idôneo e o MTSK são articulados, observando que as definições e propriedades de Funções são elementos que pertencem tanto ao polo referencial do ETM quanto ao Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) do MTSK, assim como a gênese semiótica ativada pelo polo de visualização se relaciona com as representações do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos

(KoT) quando Arturo utiliza o diagrama de flechas para identificar a correspondência entre elementos dos conjuntos de entrada e saída.

De acordo com os autores, os polos identificados no estudo são relacionados com o Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) quando o professor seleciona os elementos que permitem que os alunos se comprometam com as tarefas e o processo de ensino-aprendizagem a partir das escolhas dos tipos de representação, exemplos e explicações que favorecem a aprendizagem de Funções. No Quadro 3, apresentamos os conhecimentos especializados identificados no artigo.

Quadro 3. Conhecimentos especializados identificados no A02

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento**	**Associado a ...**	**Que consiste em ...**
Trecho	[Subdomínio]	[Categorias]	[Síntese do conhecimento]
"O professor (Arturo – A02) determinou a imagem de um elemento dada a correspondência retratada em um diagrama sagitário, observando as setas desenhadas entre os elementos de um conjunto e outro, ou avaliando a expressão algébrica (p. 201)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Duas [representações] de Funções, "um diagrama sagitário" para observar as relações entre os elementos de dois conjuntos e a representação dada pela "expressão algébrica".*
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	*Procedimentos*	*Indícios de conhecimento de [procedimentos] ao "observar as setas desenhadas entre os elementos de um conjunto" para determinar a imagem ou "avaliando a expressão algébrica" para determinar a pré-imagem.*
"(Arturo – A02) também trabalhou na identificação pré-imagem de uma imagem dada por meio de estimativas ou a realização do processo inverso para o que é estabelecido pela	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registro de representações*	*Uma [representação] "algébrica" de uma Função ao propor uma tarefa.*
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	*Procedimentos*	*Dois [procedimentos] para determinar imagem e pré-imagem, sejam por*

função, ou seja, se a função dada for x+4 (adicionar 4), a pré imagem será dada por y-4 (subtrair 4), propondo a tarefa agora com o uso de outra representação (algébrica) (p. 202)".			*"estimativas ou a realização do processo inverso para o que é estabelecido pela função".*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [tarefa] proposta com "o uso de outra representação (algébrica)".*
"Posteriormente, parece que (Arturo – A02) intencionalmente leva seus alunos ao desequilíbrio cognitivo quando ele lhes pede para o determinar as pré-imagens da função f(x)=2x+1 (p. 202)".	*Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)*	*Potencialidades e dificuldades de aprendizagem*	*Uma [dificuldade] dos estudantes em determinar "pré-imagens" de uma Função, levando intencionalmente os seus alunos "ao desequilíbrio cognitivo".*
"Em termos de ETM, a gênese semiótica desencadeia a visualização usando o diagrama sagital para mostrar as setas desenhadas entre os elementos do conjunto de partida e chegada (p. 202)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Uma [representação] de Função através do "diagrama sagital para mostrar as setas desenhadas entre os elementos do conjunto de partida e de chegada".*
"Esses elementos são usados pelo professor (Arturo – A02) para projetar o ETM ideal, que selecionou os tipos de representações, os exemplos dados e as explicações (p. 202)".	*Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT)*	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma organização didática ao selecionar "os tipos de representações, os exemplos dados e as explicações".*
(Arturo – A02) sobre a atividade para determinar a pré-imagem de uma Função: "O que eu quero fazer é que encontremos uma maneira de fazer isso, independente da função que eles me dão, façamos o mesmo procedimento independente da função e eu quero que deduzamos (p. 202)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para determinar a pré-imagem de uma Função, de modo que utilize "o mesmo procedimento independente da função" apresentada.*

"Aqui, como era simples, consegui descobrir quem enviei para dar 2, por isso mudei a função deles para uma em que não é tão óbvio quem enviei para chegar a 0. Aqui eles estão pensando 'ah, pode ser -1', mas a imagem de -1 vai ser [calcular] -2 + 1 = -1, certo? Esse aqui funciona para mim? ... Não funciona para mim. Quem mais poderia ser candidato? (Arturo – A02, p. 202)".	*Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)*	*Potencialidades e dificuldades de aprendizagem*	*Uma [dificuldade] dos estudantes para determinar a pré-imagem por estimativas quando Arturo muda a Função, de modo que não seja "tão óbvio" o número colocado para que a Função chegue a zero.*
"Sim, o que a gente quer é, por exemplo, que isso nos dê 5, e se 'isso quer que eu dê 5' vira uma equação ... Por isso vimos equações e desigualdades antes! (Arturo – A02, p. 203)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para determinar a pré-imagem de uma Função em que a Função "vira uma equação".*
	Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM)	*Conexões auxiliares*	*Uma [conexão] entre os temas de Funções e equações lineares, em que o professor justifica o estudo de "equações e desigualdades antes".*
	Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS)	*Sequenciação de tópicos*	*Um [conhecimento prévio] que os estudantes desenvolveram ao estudarem anteriormente "equações e desigualdades".*
"Se eu quiser a imagem de 10, eu faço 10 passar pela função e chega como 51, outra coisa é Quero a pré-imagem de 10, ou seja, 10 não está no conjunto inicial, está no conjunto de chegada, então quem mandei para que aquele número, ao passar pela função, que chegasse como 10? Significa que a	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Dois [procedimentos] para determinar a imagem e a pré-imagem de uma Função e quando utilizá-los. "Se quiser a imagem de 10, eu faço 10 passar pela função e chega como 51", mas se quiser a pré-imagem de 10, "significa que a função tem que me dar 10", portanto,*

função tem que me dar 10. Dissemos que encontrar pré-imagens era o mesmo que resolver uma equação, porque eu quero que a função 5x + 1 me dê 10, então ela se torna uma equação. Quando eu encontro imagens, eu pego o valor, coloco na função e ela joga sua imagem para mim, mas quando eu quero pré-imagens eu pego a função e igualo ao valor que eu quero que ela seja. Ao limpar aqui, o que terei deixado? (Arturo – A02, p. 204)".		*para determinar a pré-imagem de uma Função é necessário "resolver uma equação".*

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2022).

No A03, Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017) avaliaram o conhecimento docente sobre o conceito de função e seu ensino na perspectiva do MTSK, principalmente quando o professor utiliza analogia para facilitar a compreensão do conceito de função e se apropriam de um estudo de caso instrumental envolvendo um professor (Arturo), com dez anos de experiência e que atua no Ensino Médio.

As aulas em que Arturo planejava introduzir os conceitos de funções foram observadas e gravadas em áudio e vídeo. Os episódios foram transcritos para uma análise de conteúdo, no qual foram considerados apenas os episódios em que havia evidências de conhecimento especializado, os classificando dentro das categorias dos subdomínios do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) e do Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) de Carrillo *et al.* (2014).

Destaca-se a articulação entre o Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) e Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) de Arturo, que define função como uma correspondência entre elementos de dois conjuntos, onde, para cada elemento do conjunto de entrada corresponde a um único elemento de saída e para facilitar a compreensão de tal definição, o professor utilizou uma estratégia que tem a intenção de aproximar o conceito da realidade dos estudantes ao fazer uma analogia de funções como uma máquina de lavar, na qual a roupa suja era o elemento pertencente ao domínio (conjunto de entrada) e a roupa que sai limpa era um elemento do contradomínio (conjunto de saída).

O uso de analogias favorece a compreensão e visualização de objetos abstratos e mostra o conhecimento do professor sobre como auxiliar o seu aluno (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017). Além disso, os autores destacam que diferentes componentes podem ser identificados, como domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem. Os conhecimentos identificados na análise de Arturo contemplam os subdomínios Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT**)** nas categorias: Definições, Registros e representações, Fenomenologias e aplicações; e no Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT**)** nas categorias de Estratégias de ensino e conhecimento de exemplos. Os conhecimentos identificados no A03 são apresentados no Quadro 4.

Quadro 4. Conhecimentos especializados identificados no A03

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento**	**Associado a ...**	**Que consiste em ...**
Trecho	[Subdomínio]	[Categorias]	[Síntese do conhecimento]
"(Arturo – A03) definiu função como uma correspondência entre elementos de dois conjuntos em que cada elemento do conjunto de entrada corresponde a um único elemento do conjunto de saída (p. 3291)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [definição] de Função como "uma correspondência entre elementos de dois conjuntos", na qual "cada elemento do conjunto de entrada corresponde a um único elemento do conjunto de saída".*
Arturo – A03: "Antes de dar mais nomes, a função funciona como uma espécie de máquina. Um exemplo pode ser uma máquina de lavar. Uma máquina de lavar realiza uma função. Qual é a sua função? (p. 3291)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Fenomenologias e aplicações*	*Uma [aplicação] do conceito de Funções no funcionamento de uma máquina de lavar roupa, na qual "a função da máquina é lavar".*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [analogia] utilizada pelo professor para instruir os estudantes sobre os conceitos de função em que "a função funciona como uma espécie de máquina. Um exemplo pode ser a máquina de lavar".*
"A analogia é apresentada em dois formatos: na intervenção descrita e quando o professor desenha uma	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros e representações*	*O professor representou [verbalmente] através da "intervenção descrita" e por [analogia], quando "o professor desenha*

máquina de lavar no quadro branco (p. 3292)".			*uma máquina de lavar no quadro branco".*
"Com os números, a função não faz a lavagem. Isso vai adicionar dois a tudo o que vier [ele escreve 'f (x) = x + 2']. Tudo o que entra na função, na máquina, eu adiciono dois a ela. Se esta é a minha máquina que adiciona dois a tudo o que entra, se entra um, como sai?" (Arturo, p. 3293)	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros e representações*	*Uma [representação] algébrica de uma Função, onde escreve "f(x) = x + 2".*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Um [exemplo] que "visa trabalhar no domínio-alvo de Funções" ao ensinar "com números".*

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

No A04, Hatsaru e Herbas (2017) buscam responder como o conhecimento matemático dos professores ao ensinar o conceito de função e os resultados de aprendizagem de seus estudantes se inter-relacionam, tendo como objetivo examinar as possíveis inter-relações entre o MKT dos professores do Ensino Médio e os resultados de aprendizagem de seus alunos sobre o conceito de Função. Quanto ao referencial, os autores desenvolveram um quadro teórico para relacionar os domínios dos professores sobre o conceito de Função através do MKT de Ball e seus colaboradores (2008) como uma combinação entre os subdomínios do Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), Conhecimento do Conteúdo e Alunos (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT). Para elaborar a estrutura, tomaram como referência os estudos de Nyikahadzoyi (2015), Cooney *et al.* (2010) e Even (1990).

O estudo foi desenvolvido em turmas de 9º ano na Turquia e dividido em duas etapas, sendo que a primeira envolvia 42 professores de 20 escolas, uma vez que 13 concordaram em ser observados para coleta de dados. Desses, 2 foram escolhidos para observação: um foi considerado mais fraco e outro mais forte em relação ao conhecimento apresentado nos testes (Ali – 14 anos de experiência) e (Fatma – 25 anos de experiência) e seus respectivos alunos (33 de Ali e 26 de Fatma) para o desenvolvimento da segunda etapa. Os sujeitos foram submetidos a uma entrevista uma semana antes de iniciarem o conteúdo com suas turmas, as entrevistas foram gravadas em áudio e vídeo, bem como as 18 aulas que também contaram com a participação de um dos pesquisadores.

Enquanto Ali buscava preparar seus estudantes para as avaliações apresentando as definições do livro didático e aplicando exercícios para determinar imagem e pré-imagem de uma Função através de expressões algébricas, Fatma se baseava mais em aspectos conceituais e procedimentais, abordando os principais conceitos relacionados a Funções e relacionando suas diversas representações. Os autores Hatsaru e Erbas (2017) destacam que Ali estava preso ao livro didático, enquanto Fatma buscava adaptar atividades para melhor compreensão de seus estudantes. Ali explicava Funções como um processo de transformação de objetos e utilizou uma analogia de Função como o processo de uma máquina de moer café, em que os grãos pertencem ao conjunto do domínio, a máquina é a regra da Função e o pó é a imagem e mostrou-a como um processo de entrada e saída. Por sua vez, Fatma iniciou o ensino falando sobre as funções de alguns objetos, como por exemplo o gravador de voz, em seguida, fez analogias de Funções como uma máquina de lavar e como um telefone.

Para tirar a dúvida dos estudantes que não compreenderam muito bem as relações funcionais em uma atividade proposta, Ali enfatizou a propriedade de univalência de uma Função e traçou uma relação em que todos os elementos do domínio correspondiam ao mesmo elemento do contradomínio.

Fatma desenhou um conjunto de correspondência no quadro e pediu para que os estudantes identificassem a regra que corresponde à relação, enfatizando as relações entre o produto cartesiano, relação e Função. Além disso, adaptou uma atividade do livro didático na qual enfatizou o requisito de univalência, explicou o domínio, contradomínio e imagem e buscou se aprofundar no significado dos conceitos de Função, levantando uma discussão sobre a interpretação de gráficos.

Segundo Hatsaru e Herbas (2017), Ali percebeu a Função como uma operação algébrica e não estava ciente sobre suas múltiplas representações, seu conhecimento sobre os recursos essenciais de Funções eram limitados. Seus alunos percebiam as Funções mais como fórmulas matemáticas e não conheciam as diferentes representações de uma Função, tornando seus conhecimentos limitados sobre o conceito. Por sua vez, Fatma percebeu a Função como uma relação de correspondência e estava ciente de suas múltiplas representações, seu conhecimento sobre os recursos essenciais de Função eram profundos. Em relação aos seus alunos, perceberam a Função como correspondência entre conjuntos, muitos compreenderam definição, pares ordenados e gráficos e demonstraram mais consciência sobre os recursos essenciais de uma Função.

De um modo geral, os autores consideram que há interações indiretas entre o MKT dos professores e o aprendizado respectivo de seus alunos, destacando que o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) parece influenciar fortemente o Conhecimento do Conteúdo e Alunos (KCS), refletindo em suas práticas de ensino. Entretanto, é destacado que alguns resultados de aprendizagem independem do MKT dos sujeitos analisados e os autores atribuem esses resultados a alguns fatores como a complexidade inerente ao próprio conceito de Função, a alguns alunos não utilizarem a definição de Função para relacionar objetos matemáticos, às dificuldades em aritmética, à falta de motivação dos estudantes no Ensino Médio Profissional e ao fato de não gostarem da disciplina de Matemática. Em relação aos 42 professores analisados, os autores consideram que professores do Ensino Médio Profissional têm baixas expectativas de aprendizagem dos seus alunos, e que Fatma esperava mais de seus estudantes do que Ali, o que resultou em resultados melhores no aprendizado de seus alunos em relação aos de Ali.

Quadro 5. Conhecimentos especializados identificados no A04

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento**	**Associado a ...**	**Que consiste em ...**
Trecho	[Subdomínio]	[Categorias]	[Síntese do conhecimento]
"(Ali – A04) percebeu o conceito de função como uma operação, agindo sobre um determinado número, geralmente por meio de operações algébricas, a fim de obter sua imagem. No teste de conceito de Função a definiu como a identificação de que cada elemento de um conjunto corresponde conforme necessário a um elemento de outro conjunto e exemplificou o valor de alguns elementos (p. 711)."	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [definição] de Função como uma relação entre conjuntos através de uma lei de correspondência em que "a cada elemento de um conjunto corresponde conforme necessário" a um elemento de outro conjunto.*
"Na entrevista, ele (Ali – A04) explicou que poderia citar exemplos da vida cotidiana, como a moagem de trigo no moinho para fazer farinha, mas como era mais importante para os alunos avaliar as funções	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para determinar imagem e pré-imagem "de acordo com a regra dada".*

para lidar com as questões do exame e certas operações (por exemplo, funções de composição), ele definiu e exemplificou a função como ele havia feito. Ele afirmou: não ensino esse assunto há alguns anos, então vou dar uma olhada no fim de semana, mas vou apresentar a definição matemática e demonstrar como encontrar os números e as letras de acordo com a regra dada (p. 711)".	*Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)*	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Um [exemplo] da "vida cotidiana, como a moagem de trigo" que pode ser utilizado para facilitar a compreensão do conceito de Função.*
"Ele (Ali – A04) estava ciente do requisito de univalência de funções e de usá-la funcionalmente ao decidir a funcionalidade de relações de correspondência de conjuntos, mas não as relações em outras formas (p. 711)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [propriedade] de "univalência de funções" com a finalidade de "decidir a funcionalidade de relações de correspondência de conjunto".*
Segundo Hatsaru e Herbas (2017), para identificar se os gráficos apresentados eram relações funcionais Ali "usou o teste de linha vertical, mas muitas vezes confundiu o teste de linha vertical com o teste de linha horizontal (p. 711)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para identificar se um gráfico corresponde a uma Função, conhecido como "teste de linha vertical".*
"As funções algébricas dominaram sua instrução; ele realizou principalmente exemplos voltados para encontrar a imagem ou pré-	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representações*	*Uma [representação] algébrica de Função, considerando que estas representações "dominaram sua instrução".*

imagem de funções algébricas. Ele (Ali – A04) não se deteve absolutamente no significado dos conceitos; ele apresentava principalmente regras, fórmulas e, quando possível, dicas práticas, fazia exemplos de perguntas e passava para o próximo conceito (p. 712)".	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Procedimentos	Diferentes [procedimentos] "voltados para encontrar imagem e pré-imagem" através de "regras, fórmulas e dicas práticas".
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	Diferentes [exemplos] para determinar a "imagem de funções algébricas".
"Ele (Ali – A04) dependia do livro didático para decidir a ordem e o conteúdo de seu ensino (p.712)".	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	Recursos de ensino	Um livro didático utilizado como [recurso] para "decidir a ordem e o conteúdo de seu ensino".
"Ele (Ali – A04) explicou a função como uma transformação de objetos em uma entidade diferente sob um determinado processo. Ele pediu aos alunos que examinassem as imagens na primeira atividade do livro, mostrando que uma função era um mecanismo que converte entradas em saídas (p. 712)".	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Uma [definição] de Função "como uma transformação de objetos em uma entidade diferente sob um determinado processo".
"(Ali – A04) chamou a atenção para o fato de que deve existir um processo ou uma máquina, como grãos de café sendo colocados na máquina, sendo expostos a um processo e terminando na forma de pó (p. 712)".	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Fenomenologias e aplicações	Uma [aplicação] do conceito de Função em uma máquina de moer café, em que "os grãos de café sendo colocados na máquina, são expostos a um processo e terminando em forma de pó".
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	Uma [estratégia] de ensino ao fazer uma analogia do conceito de Função como um "processo ou máquina" de moer café.

“Como alguns dos alunos não entenderam a condição de alguém comer mais de um prato, ele (Ali – A04) explicou da seguinte forma: O que isso significa é que Soner comeu Kebap; uma flecha vai de Soner a Kebap. Se ele também comesse feijão, isso entraria em conflito com a regra ‘um alimento para uma pessoa’; em outras palavras, se outra flecha foi para o feijão, significa que Soner comeria duas vezes. Isso não pode acontecer! (p. 712)”.	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma condição necessária para que uma relação seja uma Função através da [propriedade] de univalência a partir do exemplo de que “Soner comeu Kebap; uma flecha vai de Soner a Kebap. Se ele também comesse feijão, isso entraria em conflito com a regra”.*
“Ele (Ali – A04) forneceu dois exemplos semelhantes, um dos quais foi: Mostre a seguinte função por meio de uma lista e um mapeamento e encontre seu domínio e intervalo: A = {- 2,0,2,3}, B = {- 3, 0,1,4,5,7} f: A → B e (f(x) = 2x + 1). Ele relacionou o exemplo às analogias que usou enquanto explicava a função. Ele disse aos alunos que o domínio no exemplo representava os grãos de café, a regra de função representava a máquina de café e o intervalo representava o café moído. Então, ele encontrou a imagem dos elementos do domínio. Mostrando-os na forma de um conjunto de pares ordenados e um diagrama de flechas,	*Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)*	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Um [exemplo] para mostrar uma “função por meio de uma lista e um mapeamento” e encontrar o seu domínio e intervalo.*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [analogia] utilizada para auxiliar o desenvolvimento de uma atividade em que “o domínio no exemplo representava os grãos de café, a regra da função representava a máquina de café e o intervalo e o intervalo representava o café moído”.*
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	*Registros de representações*	*Três [representações] de uma Função, sendo elas a algébrica “f(x) = 2x +1) e “na forma de pares ordenados” e através de “um diagrama de flechas”.*

ele denotou o intervalo e os conjuntos de imagens (p. 713)".			
"No teste, ela (Fatma – A04) definiu a função (item 1) como uma regra levando um elemento a outro elemento ou a si mesmo e exemplificou (item 2) como f (x) = 3x + 1. Na entrevista, ela expressou que a função também poderia ser definida e exemplificada como a transformação de um objeto em processo (por exemplo, transformação de tecido em uniforme escolar), mas para ela esse B não a define exatamente (p. 715)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Duas [definições] de Função. Como "uma regra levando um elemento a outro elemento ou a si mesmo" (Relação de dependência) e como "a transformação de um objeto em processo" (Transformação).*
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	*Registros de representação*	*Uma [representação] algébrica de uma Função "f(x) = 3x + 1".*
"De acordo com ela (Fatma – A04), a essência da função era que nenhum elemento seria deixado no domínio, e nenhum elemento no intervalo teria duas imagens diferentes, ou seja, o requisito de univalência (p. 715)"	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [propriedade] de univalência necessária para definir uma Função, em que "nenhum elemento no intervalo teria duas imagens diferentes".*
"Ela (Fatma – A04) justificou sua escolha como Eles [os alunos] devem ser capazes de identificar se um gráfico ou um conjunto de pares ordenados é uma função (p. 715)".	*Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS)*	*Resultados esperados de aprendizagem*	*Uma [habilidade] que os alunos deverão adquirir para que sejam "capazes de identificar se um gráfico ou um conjunto de pares ordenados é uma função".*

Caso um aluno perguntasse se a mesma função teria representações diferentes, ela (Fatma – A04) apontou que uma função poderia ser mostrada por letras diferentes, como um diagrama, ou como f: A → B, f (x) = y.	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Duas [representações] de uma Função, através da representação algébrica "f(x) = y" apontando que poderia tal relação poderia ser mostrada "com letras diferentes" e também como "um diagrama".*
"Ela (Fatma – A04) atribuiu a maneira de pensar do aluno em (a) ao fato de que a imagem dos elementos no conjunto de domínio era única. Para ela, a aluna não percebeu (b) como uma função porque o gráfico estava desconectado. No que diz respeito a (c), ela acreditava: B O aluno pode ter pensado que uma função deveria ser atribuída por uma única regra. Ela justificou por que o aluno não viu (e) como uma função dizendo: Visto que não envolve x, o aluno pode pensar assim. Ela atribuiu o fato de o aluno não considerar (d) uma função ao fato de ele não estar familiarizado com a expressão verbal de uma função por partes. Da mesma forma, ela pensou, uma vez que os alunos não estavam familiarizados com a forma do conjunto de pares ordenados de uma função, eles não tomaram (f) como uma função. Na entrevista, ela representou essa relação na forma de	*Conhecimento das Características de Aprendizagem de matemática (KFLM)*	*Potencialidades e dificuldades de aprendizagem*	*Diferentes [dificuldades] associadas à reconhecer relações funcionais, como não reconhecer Funções constantes "a imagem dos elementos do conjunto de domínio era única", não reconhecer Funções descontínuas "a aluna não percebeu (b) como uma função porque o gráfico estava desconectado" e ao associar relações funcionais apenas a representações algébricas "Ela atribuiu o fato de o aluno não considerar (d) uma função ao fato de ele não estar familiarizado com a expressão verbal de uma função" ou "Visto que não envolve x". E uma [potencialidade] em reconhecer relações funcionais através do diagrama de flechas, que segundo ela "os alunos reconheceriam facilmente que a relação era uma função".*

um diagrama de flechas, com a ajuda do qual, segundo ela, os alunos reconheceriam facilmente que a relação era uma função (p. 715)".			
Em relação a uma possível resposta incorreta dos estudantes "Ela (Fatma – A04) afirmou que os alunos teriam pensado que quaisquer dois pontos distintos ocorreram com apenas uma linha. O aluno, portanto, pode ter traçado uma linha reta. Ela afirmou que um número infinito de gráficos passando pelos pontos A e B poderiam ser desenhados (p. 715)".	*Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)*	*Potencialidades e dificuldades de aprendizagem*	*Um possível [erro] de um estudante, que a partir de dois pontos no plano cartesiano "pode ter traçado uma linha reta", sendo que "um número infinito de gráficos passando pelos pontos A e B poderiam ser desenhados".*
"Ela (Fatma – A04) geralmente preparava os exercícios sozinha, embora às vezes também usasse os do livro didático (p. 716)".	*Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)*	*Recursos materiais e virtuais*	*Um livro didático como [recurso material] no qual Fatma "as vezes usava" para adaptar os exercícios.*
"Ela (Fatma – A04) achava que a compreensão total da função ajudaria os alunos a aprender tópicos mais avançados (p. 716)".	*Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS)*	*Sequenciação de tópicos*	*Conhecimento sobre a necessidade de compreensão total do tópico de Funções para ajudar "os alunos a aprenderem tópicos mais avançados".*
"Ela (Fatma – A04) falou sobre funções de objetos (por exemplo, estojo, gravador de voz) e trouxe à tona o significado de função como operação usando algumas analogias (por exemplo,	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Fenomenologias e aplicações*	*Diferentes [aplicações] do conceito de Função em "objetos" como (estojo, gravador de voz, máquina de lavar e telefone).*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*"Algumas analogias" de Função como (máquina de lavar*

máquina de lavar, telefone). Ela disse que a definição matemática da função, no entanto, é diferente. Ela desenhou um conjunto de correspondência no quadro e pediu aos alunos para identificar os elementos no conjunto A e descobrir uma regra que mapeou esses elementos para o conjunto B. Ela enfatizou as relações entre o produto cartesiano, relação e função (p. 716)".			e telefone) como estratégias de ensino.
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Conhecer que a "definição matemática da função é diferente" dos exemplos mencionados e da analogia feita por ela.
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Registros de representação	Duas [representações] de uma Função ao desenhar "um conjunto de correspondência" (diagrama de flechas) e enfatizar "as relações entre o produto cartesiano, relação e função" (algébrico).
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	Uma [tarefa] em que os alunos identificam "elementos no conjunto A" e devem "descobrir uma regra que mapeou esses elementos para o conjunto B".
"Ela (Fatma – A04) então adaptou a segunda atividade do livro didático para seus alunos. Por meio dessa atividade, ela enfatizou o requisito de univalência de funções e explicou o domínio, o alcance e o conjunto de imagens, e mostrou cada um deles em um diagrama. Além disso, conforme afirmado a seguir, ela falou sobre a relação entre os conceitos de alcance e imagem (p. 716)".	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	Uma [tarefa] adaptada "do livro didático para seus alunos".
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Uma [propriedade] de "univalência de funções. Além disso, conforme afirmado a seguir, ela falou sobre a relação entre os conceitos de alcance e imagem".
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	Recursos materiais e virtuais	Um [recurso material] "livro didático" do qual adaptou a atividade para os seus alunos.
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Registros de representações	Uma [representação] de Função por diagrama de Venn ao mostrar "o

			conjunto de imagens em um diagrama".
"Ela (Fatma – A04) explicou que as funções podem ser expressas de maneiras diferentes, ou seja, f: A → B, f (x) = y, A → f B, x → f y e f: x → y. Ela ressaltou, por ser uma relação, uma função poderia ser representada na forma de conjuntos de pares ordenados, mas também em expressões algébricas, conjunto de correspondências e gráficos (p, 717)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representações*	*Diferentes [representações] de uma Função "na forma de conjuntos de pares ordenados", "em expressões algébricas, conjunto de correspondências e gráficos".*
"Enquanto (Fatma – A04) analisava essas expressões, ela usualmente usava o método da prova por contradição. No item (d), entretanto, ela fez uma generalização como ∀ x ∈ N, x + 2 ∈ N. Uma vez que todos os números têm uma imagem, é uma função (p, 717)".	*Conhecimento da Prática Matemática (KPM)*	*Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar*	*Uma "prova por contradição" para analisar se expressões algébricas eram Funções. E uma "generalização" em que para todo x pertencente ao conjunto N, x + 2 também pertencia ao conjunto N, "uma vez que todos os números têm uma imagem", portanto, "é uma função".*
"Uma das outras perguntas sobre a funcionalidade de alguns gráficos. Ela (Fatma – A04) usou o teste da linha vertical para identificar se os gráficos dados definem funções. Ela comparou o teste a pentear para baixo e relacionou-o com a definição da função. No entanto, para ela, o teste da linha vertical funcionaria apenas para gráficos; se os alunos entendessem bem a definição, não	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] do "teste da linha vertical para identificar se os gráficos dados definem funções".*

haveria necessidade de tais regras práticas (p, 717)".	

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

No A05, Rodriguez-Flores *et al.* (2018) tem como objetivo caracterizar o Conhecimento Especializado do Conteúdo do professor de Matemática ao ensinar os conceitos de Função na Educação Básica em uma escola pública da Costa Rica. Como base teórica os autores utilizam o *Mathematics Knowledge for Teaching* de Ball e seus colaboradores (2008) para analisar o conhecimento dentro do subdomínio Conhecimento Especializado do Conteúdo e se apropriam da análise didática de Gomez (2007), que é composta por cinco partes, sendo elas: análise conceitual, de conteúdo, cognitiva, de instrução e de avaliação. E para identificar o conhecimento que o professor põe em prática, fazem o uso de uma proposta desenvolvida por Rojas, Flores e Ramos (2013) para relacionar os componentes da análise didática e do conhecimento matemático para o ensino, que para tais relações considera-se três análises parciais: de conteúdo, cognitivo e instrução. A pesquisa é classificada como estudo de caso qualitativo, envolvendo um professor de Matemática com experiência de pelo menos cinco anos de atuação no Ensino Médio. Os dados foram coletados a partir das gravações de áudio e vídeo de seis episódios, que foram transcritos e analisados pelos autores.

Segundo Rodriguez-Flores *et al*. (2018), as tarefas propostas ao longo dos episódios são de reflexão, hipotéticas, autênticas, de reprodução e conexão, sendo que elas possibilitam a construção dos conceitos de Função; são de interesse dos estudantes e dão sentido a uma variedade de contextos e ao uso de uma variedade de representações e possibilita a relação entre elas, tais tarefas contemplam as habilidades específicas do programa de estudos.

Durante a resolução do problema que envolve o cálculo da tarifa de táxi, o professor mostrou disposição para responder as perguntas dos estudantes, destacou uma variedade de procedimentos e validou os algoritmos utilizados pelos alunos. Além dos problemas propostos, os exemplos e exercícios mostram relação entre os conceitos de relação, quantidade constante, quantidade variável, variável dependente e variável independente, e um exemplo de um problema físico (segundo o professor analisado) foi apresentado para identificar as variáveis dependentes e independentes e para elaborarem a sua lei de formação.

Para facilitar a compreensão da definição de Funções como relação de dependência, o professor cita um exemplo relacionado às notas dos estudantes conforme o seu desempenho na avaliação. Durante as aulas ministradas, o sujeito apresentou riqueza, fluência e precisão da linguagem matemática e usou diferentes registros de representação de uma Função (verbal, diagrama de Venn, algébrica, numérica e gráfica) e fez relação entre elas. Fez o uso das representações tabulares, gráficas e diagrama de Venn para introduzir o conceito de pré-imagem e imagem e os gráficos foram explorados para mostrar os pares ordenados. O professor reconhece que os alunos têm dificuldade em formar um par ordenado quando se fala em abscissa e ordenada, então explica como reconhecê-las a partir das variáveis dependente e independente.

Os autores consideram que, em geral, a metodologia do professor é tradicional, que sua prática consiste em apresentar e expor os conceitos, explicá-los e passar uma série de tarefas para que os estudantes resolvam e apresentem seus resultados na lousa. Apesar disso, na primeira aula o professor inicia a introdução dos conceitos a partir de uma resolução de problema (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018).

Quadro 6. Conhecimentos especializados identificados no A05

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento**	**Associado a ...**	**Que consiste em ...**
Trecho	[Subdomínio]	[Categorias]	[Síntese do conhecimento]
No primeiro episódio o (professor – A05) apresenta um problema (uma tarefa) sobre a taxa de um táxi com o objetivo de introduzir o conceito de função, em seguida, pede aos seus alunos que, em grupos, eles resolvem isso. Uma pessoa de cada grupo deve ir para o quadro negro para mostrar o procedimento e a solução encontrada (p. 97)	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Fenomenologias e aplicações*	*Uma [aplicação] de Função no cálculo do valor de uma corrida de táxi para "introduzir o conceito de função".*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Teorias de ensino*	*Um ensino por [resolução de problemas] utilizado para ensinar Funções, em que "cada grupo deve ir para o quadro negro para mostrar o procedimento e a solução encontrada".*
O (professor – A05) usa para este problema (corrida de táxi) a representação algébrica e numérica para introduzir os conceitos de variável dependente e variável independente (p. 97).	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Duas [representações] de uma Função "algébrica e numérica para introduzir os conceitos de variável dependente e independente".*

Durante o problema (corrida de táxi) o professor ensina aos estudantes como determinar quantos quilômetros adicionais pode andar se ele dispõe de 8 mil Colones a partir da resolução de uma equação. "uma pequena equação, como faço para resolver uma equação? (Professor – A05, p. 98)".	*Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM)*	*Conexões de simplificação*	*Uma [conexão] entre o tópico de Funções com o tópico de Equações, em que para determinar quantos quilômetros adicionais poderia percorrer alguém que dispõe de 8 mil Colones, precisaria resolver "uma pequena equação".*
O (professor – A05) valida os procedimentos e soluções apresentados no quadro pelos estudantes (p. 98).	*Conhecimento da Prática Matemática (KPM)*	*Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar*	*Conhecer o processo de construção matemática para validar "os procedimentos e soluções apresentados no quadro pelos estudantes".*
"...Um exemplo diferente já da parte física, diz ele, o peso esperado P em toneladas de uma baleia adulta se relaciona com o seu comprimento L" (Professor – A05, p. 99) e ao passar a Função que representa o problema pergunta "qual é a variável dependente e a variável independente? (Professor – A05, p. 99)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Fenomenologias e aplicações*	*Uma [aplicação] de Função na relação entre o "peso P de uma baleia adulta e seu comprimento L".*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Um [exemplo] utilizado para facilitar a compreensão das variáveis dependente e independente, onde "o peso P depende do comprimento L".*
O (professor – A05) usou uma variedade de sistemas de representação para os conceitos vistos em sala de aula, por exemplo, para o conceito de relações usado representações icônicas, tabulares e simbólicas numérico e gráfico. Também se identificou um uso frequente das representações algébricas e numéricas (p. 99).	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Quatro [representações] de uma Função, sendo elas "icônicas, tabulares, numéricas, gráficas e algébricas".*
O (professor – A05) utiliza uma tarefa em um contexto de interesse para seus alunos para identificar os elementos de uma função. Essa tarefa também permitiu	*Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)*	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [tarefa] que se encontra dentro de "um contexto de interesse para seus alunos e a usa para identificar elementos de uma função".*

que ele ligasse conceitos como relação e função (p. 100).	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [conexão] entre os "conceitos como relação e função" para definir uma função como uma relação entre conjuntos.*
"E o mínimo que você poderia fazer é não ter feito absolutamente nada, não é? 0, e sei que a situação não ocorreu aqui. Suponha que E1 tirou 70, todos fizeram o teste, vamos excluir E2 que foi o único que não fez o teste para mim, mas todos os outros fizeram o teste, ok, então E1 tirou 70, faz sentido dizer que E1 ao mesmo tempo obteve 100? (Professor – A05, p. 100)".	*Conhecimento da Prática Matemática (KPM)*	*Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar*	*Uma [exemplificação] de uma relação que não corresponde a uma Função, na qual "não faz sentido dizer que E1 tirou 70 e ao mesmo tempo tirou 100".*
Para o conceito de relação, o (Professor – A05) utilizou os sistemas de representação verbal, icônico, simbólico, numérico e gráfico em um problema contextualizado a uma situação pessoal; para o conceito de função, ele usou esses mesmos sistemas de representação, mas acrescentou o simbólico algébrico. Além disso, ele introduziu os conceitos de domínio e contradomínio por meio de representações verbais e icônicas. O uso da representação gráfica foi constante para explicar os conceitos (p. 100).	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Cinco [representações] para representar uma Função, sendo elas "verbal, icônica, algébrica, numérica e gráfica".*
	Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)	*Aspectos emocionais da aprendizagem matemática*	*Um "problema" que contextualiza "uma situação pessoal", dentro de uma [expectativa] de interesse dos estudantes.*
"Então, a cada par ordenado, já teremos dois nomes, pré-imagem-imagem, variável dependente da variável independente, ou também podemos chamar 'x' – 'y', que mais adiante veremos o plano cartesiano, e para localizar pontos no plano	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para formar pares ordenados, que sempre "manterá a ordem x vírgula y".*
	Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)	*Potencialidades e dificuldades de aprendizagem*	*Uma [dificuldade] que os estudantes tem em "formar um par ordenado" quando se fala em "abscissa e ordenada".*

cartesiano, ele sempre manterá esta ordem 'x' vírgula 'y', primeiro a pré-imagem depois a imagem. Foi aí que o colega me perguntou, que não entendia dois conceitos porque falava em formar um par ordenado onde falava de abcissa e ordenada, justamente aqui a variável independente, que é o valor de 'x', é aquela que receberá o nome de abscissa e a outra receberá o nome de ordenada (Professor – A05)".	*Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS)*	*Sequenciação de tópicos*	*Abordar um conceito (pares ordenados) que será necessário para a compreensão de um [tópico futuro], para "localizar pontos no plano cartesiano".*
"O (Professor – A05) apresentou uma tarefa sobre (o vendedor de revistas), uma atividade que está dentro do contexto de aplicação e é usada para identificar elementos de uma função" (p. 100).	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Fenomenologias e aplicações*	*Uma [aplicação] do conceito de Função no cálculo do salário de um "vendedor de revistas", em que o salário (y) depende da quantidade de revistas (x) vendidas.*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [tarefa] utilizada para "identificar os elementos de uma função".*
"O (Professor – A05), em um dos exemplos, utilizou o sistema de representação numérico e icônico estabelecendo uma relação entre eles. Ele incluiu o sistema de representação tabular ao trabalhar no conceito de contradomínio e estabeleceu relações entre as representações (p. 101)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Três [representações] de uma Função, fazendo o uso das representações "numérica, icônica" e "tabular", estabelecendo relações entre essas representações.*

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

No A06, Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yáñez (2018) procuram responder quais conhecimentos são colocados em prática pelo professor de Matemática ao utilizarem analogia para ensinar os conceitos básicos de Função, tendo como referencial teórico o modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) de Carrillo *et al.* (2014), ao analisar dois professores de Matemática (Arturo e Jaime) quando utilizam a analogia como uma estratégia de ensino do referido conteúdo.

Trata-se de um estudo de caso instrumental de paradigma interpretativo e metodologia qualitativa que possibilita compreender a prática dos professores e o conhecimento manifestado por eles. Os participantes escolhidos lecionam no ensino fundamental e médio em duas escolas privadas no Chile e são classificados como professores expertos (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018), isto é, possuem mais de cinco anos de experiência. A coleta de dados se deu através da gravação em áudio e vídeo de nove sessões de aula, das quais foram consideradas apenas aquelas em que os professores ensinavam os conceitos básicos de Função (as duas primeiras aulas de Jaime e a primeira de Arturo), posteriormente os dados foram transcritos e analisados de acordo com os subdomínios e categorias do MTSK. Por fim, para aprofundar sobre os conhecimentos identificados, foram realizadas entrevistas semiestruturadas com os sujeitos, que também foram gravadas.

Jaime trabalha com os estudantes relações entre conjuntos fazendo o uso dos diagramas sagitais (diagrama de flechas) e aproveita para associar o nome dos estudantes com suas bandas favoritas e posteriormente, seus nomes a seus apelidos. Dados esses exemplos, estabelece condições para definir uma Função como “uma relação que funciona a partir de um conjunto, em que cada item desse conjunto é atribuído a um único item de outro conjunto” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 312, tradução nossa). Nesta definição, os autores observam o conhecimento de Jaime sobre as propriedades de unicidade de imagens que definem uma Função, contemplando o subdomínio do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT).

A segunda aula de Jaime é destinada à resolução de exercícios, na qual ele compara a Função a uma máquina de doces em que se insere uma moeda (valor de entrada); a máquina realiza o processo (operação) e sai o objeto resultante do processo (valor de saída). A analogia utilizada foi apresentada de forma verbal com o intuito de auxiliar os estudantes a determinarem o cálculo da imagem e pré-imagem em uma atividade proposta. Para determinar o valor da pré-imagem, Jaime recorre a uma equação ($f(x) = k$) como uma ferramenta para o estudo da pré-imagem, que se refere a uma conexão auxiliar correspondente ao Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM).

Jaime também demonstra conhecimento da representação algébrica ($f(x) = y$) utilizada em um procedimento (substituição de variáveis) para determinar imagens e pré-imagens de uma Função que correspondem ao seu Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT). Ainda, ele apresenta a Função como um processo de entrada-saída, evidenciando o seu conhecimento sobre o significado de Função e caracteriza o seu conhecimento sobre a analogia como uma estratégia de ensino que corresponde ao Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) e reconhece a potencialidade das analogias como um auxílio importante para iniciar o estudo sobre Funções, destacando que há limitações em seu uso com o passar do tempo – o que evidencia seu conhecimento sobre interações dos estudantes com o conteúdo, que faz parte do subdomínio do Conhecimento das Características de Aprendizagem Matemática (KFLM).

Arturo inicia sua explicação com um exemplo que envolve os estudantes (suas mesas e cadeiras individuais) e define Função como uma correspondência entre elementos de dois conjuntos, em que para cada elemento do conjunto de saída existe um único elemento correspondente a ele no conjunto de chegada, o que mostra seu conhecimento sobre um significado de Função (correspondência) e uma definição, que fazem parte de seu Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT).

Ao apresentar a definição, Arturo elaborou diagramas sagitais em que mostra a correspondência entre os conjuntos A e B e fez o uso de elementos genéricos (a, b, x e y) para identificar os componentes de uma Função incluídos na definição (conjunto de partida, conjunto de chegada, contradomínio) e seus respectivos elementos, demonstrando conhecimento dos registros de representação que correspondem ao Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT).

Arturo conhece uma analogia para o conceito de Função (Função como uma máquina de lavar roupas) e a representa de forma pictórica-verbal, oferecendo ajuda aos estudantes para a compreensão do conceito de Função. A analogia é utilizada por Arturo como uma estratégia de ensino, que corresponde ao Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) e fica evidente o seu Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM) quando menciona as dificuldades que os estudantes têm quando se deparam com definições formais e novos conceitos (domínio e contradomínio). Além disso, Arturo "aproveita a analogia para introduzir a notação associada as Funções combinando os elementos que a analogia fornece uma notação formal" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2018, p. 317, tradução nossa), tais relações servem como uma ponte para as notações $y = f(x)$ e $A \to B$ e correspondem ao seu Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) dentro da categoria de registros de representações.

Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrilo Yáñez (2018) destacam que há diferenças entre o conhecimento especializado de Jaime e Arturo e consideram que o fator principal para esta diferença tenha sido o momento em que os mesmos utilizam a analogia. Enquanto Arturo a utiliza para introduzir a definição de Função, Jaime prefere utilizá-la apenas depois da apresentação da definição como um auxílio para um procedimento. Além disso, é destacado que os professores apresentam o significado de Função apenas como um processo de entrada e saída de objetos, o que pode limitar a concepção de Função por parte dos estudantes. Da mesma forma, há o conhecimento dos professores sobre a necessidade de os estudantes estarem familiarizados com essas máquinas apresentadas para dar significado ao conceito de Função, favorecendo o seu raciocínio por analogia. A pluralidade das características da analogia possibilita observar a integração do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK), identificando diferentes subdomínios do modelo teórico quando os professores a utilizam.

Quadro 7. Conhecimentos especializados identificados no A06.

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento**	**Associado a ...**	**Que consiste em ...**
Trecho	[Subdomínio]	[Categorias]	[Síntese do conhecimento]
"Durante a primeira aula, (Jaime – A06) trabalha as relações entre conjuntos representados por diagramas sagitais que evidenciam seu conhecimento sobre representações de uma função (p. 312)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representações*	*Uma [representação] de Funções "por diagramas sagitais que evidenciam seu conhecimento sobre representações de uma função".*
"O professor (Jaime – A06) propõe exemplos de funções e relaciona os nomes de seus alunos com seu grupo musical preferido e seus nomes com seus sobrenomes. Com esses exemplos, Jaime estabelece condições para definir o conceito de função como uma relação que parte de um conjunto, em que a cada elemento desse conjunto é atribuído um único elemento do outro conjunto (p. 312)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [definição] de Função como relação entre dois conjuntos, em que para "cada elemento desse conjunto é atribuído um único elemento do outro conjunto".*
	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Dois exemplos (relação entre nomes e sobrenomes, alunos com seu grupo musical favorito) que são utilizados para estabelecer "condições para definir o conceito de função".*
"Na definição fornecida por (Jaime – A06), é identificado o conhecimento da exclusividade e unicidade da imagem que a definem (p. 312)".	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [propriedade] de "exclusividade e unicidade de imagem" que definem uma Função.*

"(Jaime – A06) usa a analogia para ajudar seus alunos a compreender e realizar o cálculo da imagem e pré-imagem, estabelecendo a analogia a partir de sua natureza funcional, comparando a máquina de doces com o processo que define a função (p. 313)".	*Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)*	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [estratégia] de ensino utilizada para "ajudar seus alunos a compreender e realizar o cálculo da imagem e pré-imagem, estabelecendo a analogia a partir de sua natureza funcional".*
"Para determinar a pré-imagem de um valor de saída, (Jaime – A06) recorre a resolução de uma equação do tipo f(x) = k (p. 314)".	*Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM)*	*Conexões auxiliares*	*Uma [conexão] entre o tema de Equações e Funções "para determinar a pré-imagem de um valor de saída".*
"(Jaime – A06) faz a avaliação da expressão algébrica, mostrando assim conhecimento dos procedimentos para determinar imagens e pré-imagens e conhecimento da expressão algébrica para a função y, a notação $\boldsymbol{f(x) = y}$ *(p. 314)".*	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representações*	*Uma [representação] "algébrica para a função y, a notação* $f(x) = y$*".*
	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	*Procedimentos*	*Um [procedimento] para "determinar imagens e pré-imagens" de uma Função a partir da resolução da equação f(x) = k.*
"A relação que (Jaime – A06) estabelece entre função e máquina dispensadora baseia-se na utilização da máquina como relação entre uma moeda e um produto, entregando apenas um resultado, enfatizando a natureza univalente da função. Embora o processo de cálculo de imagens e pré-imagens em uma função seja comparado no texto com uma máquina, Jaime apresenta a analogia para	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Definições, propriedades e seus fundamentos*	*Uma [propriedade] do conceito de Função, destacando a "característica de unicidade".*

destacar a característica de unicidade na atribuição de imagem da função. Isso explica o conhecimento de uma das propriedades do conceito de função como parte do Conhecimento do sujeito (p. 314)".			
(Jaime – A06): "Não sei se ajuda o conceito ou não, pois são exemplos que acho que podem ser úteis para iniciar o processo. Se você me perguntar corretamente sobre esta máquina, claramente não. Acho que nem se lembram, mas naquele momento, para mim foi um exemplo que achei útil, pelo menos conhecido, porque todo mundo comprou na dispenser, mas acho que não serviu para o resto do que se vê das funções (p. 315)".	Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)	Interação do estudante com o conteúdo	Conhecimento de uma situação familiar aos estudantes (comparação entre Funções como uma máquina dispenser) que pode ser "útil para iniciar o processo de ensino", uma vez que, em relação aos estudantes, todos já tenham comprado na dispenser, ou seja, conhecem o seu funcionamento.
(Arturo – A06): "Então, como vamos definir uma função? Como uma correspondência de elemento de dois conjuntos em que cada elemento do conjunto inicial corresponde a um único elemento do conjunto de chegada (p. 315)".	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Uma [definição] de Função como uma correspondência entre conjuntos, em que "cada elemento do conjunto inicial (de saída) corresponde a um único elemento do conjunto de chegada". E uma [propriedade] de unicidade utilizada para tal definição.
"Ao apresentar a definição, (Arturo – A06) faz um diagrama sagital no qual mostra uma correspondência entre os conjuntos A	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Registros de representações	Uma [representação] de Função através de "um diagrama sagital" para mostrar a correspondência

e B a partir dos elementos genéricos a, b, x e y (p. 315)".			*entre os conjuntos A e B.*
(Arturo – A06): "A roupa suja seria o conjunto inicial e a vestimenta limpa seria a chegada, é o que faz uma função. Aqui a roupa estaria suja, faz o serviço, faz o que tem que fazer, dependendo da máquina, e chega do outro lado, nesse caso, como estava a máquina de lavar, chega limpa (p. 316)".	*Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)*	*Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*	*Uma [estratégia] de ensino ao fazer uma analogia entre Função e o processo de uma máquina de lavar para facilitar a compreensão dos estudantes sobre a definição de Função, em que roupa suja seria elemento do conjunto de saída e "a roupa limpa seria a chegada", realizando assim a função de lavar.*
(Arturo – A06): "Quando você tem uma definição matemática, de repente fica muito difícil para os alunos do primeiro ano entendê-la, então se faz uma explicação dela, usando sinônimos, de forma que eles possam entender o que está escrito ali, o que você quer dizer (p. 317)".	*Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)*	*Potencialidades e dificuldades de aprendizagem*	*Uma [dificuldade] que os alunos do primeiro ano têm para entender "uma definição matemática" formal, tendo como alternativa [potencializar] a compreensão dos estudantes ao fazer "uma explicação dela (definição) usando sinônimos de forma que eles possam entender o que está escrito ali, o que você quer dizer".*
"(Arturo – A06) aproveita a analogia para destacar o caráter de processo da função e para introduzir a notação associada às funções, combinando os elementos que a analogia fornece com a notação formal. Essas relações são a ponte para as notações y = f (x) e A → B, apresentando uma combinação entre a linguagem	*Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)*	*Registros de representação*	*Duas [representações] de Função, sendo elas pictórica e algébrica através das combinações entre a "linguagem simbólico-matemática e a representação pictórica".*

simbólico-matemática e a representação pictórica (p. 317)”.

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

A análise vertical dos artigos nos permitiu identificar algumas características semelhantes como o foco, os métodos e participantes, e também observar algumas diferenças como, por exemplo, os referenciais teóricos utilizados. A partir das informações obtidas, na próxima sessão apresentamos a análise horizontal.

3.2 ANÁLISE HORIZONTAL

A seguir, apresentamos uma análise horizontal dos resultados obtidos a partir da produção científica sobre o conhecimento do professor de Matemática para o ensino de Funções em relação ao foco da investigação, ao referencial teórico, aos procedimentos metodológicos, ao nível de ensino, aos resultados e conclusões e aos conhecimentos especializados que aparecem nas produções.

3.2.1 Quanto ao foco da investigação – objetivo e/ou pergunta da pesquisa

As pesquisas buscam analisar o conhecimento do professor de Matemática ao ensinar principalmente os conceitos básicos de Função. No A03 e no A06 os autores optam por fazerem essa análise quando o professor utiliza a analogia de Funções como uma máquina. No A03 Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017) consideram apenas os subdomínios do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos e do Conhecimento do Ensino da Matemática, e estabelecem conexões entre eles. Já no A06 Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yáñez (2018) buscam responder quais conhecimentos são colocados em prática pelo professor de Matemática dentro do ensino do referido tema ao utilizar a analogia.

No A01, Rodriguez-Flores *et al.* (2016) buscam descrever o processo de ensino que o professor segue ao ensinar os conceitos básicos de função, identificar os componentes do conteúdo que manifesta o professor ao ensinar os seus conceitos básicos e determinar indicadores sobre o conhecimento comum do conteúdo que caracterizam o professor ao ensinar Funções, enquanto no A05 Rodriguez-Flores *et al.* (2018) almejam caracterizar o conhecimento especializado do conteúdo manifestado pelo professor.

Enquanto as produções mencionadas anteriormente buscam identificar e analisar o conhecimento dos professores, os artigos A02 e A04 se interessam fazer algumas relações.

Espinoza-Vásquez *et al.* (2016) estabelecem uma relação entre o Espaço de Trabalho Matemático (ETM) e o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) e Hatisaru e Erbas (2016) enfocam nas inter-relações entre o conhecimento mobilizado pelos professores e o aprendizado dos alunos, tendo como objetivo examinar as possíveis inter-relações entre o conhecimento matemático para o ensino (MKT) dos professores e a aprendizagem de seus alunos.

3.2.2 Quanto ao referencial teórico

Para analisar o conhecimento dos professores, os autores se apropriam dos subdomínios e categorias de modelos teóricos de conhecimento de professores que são específicos para o ensino de Matemática. O Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Ball e seus colaboradores (2008) aparece no A01, onde Rodriguez-Flores *et al.* (2016) analisam os conhecimentos dentro de um único subdomínio (Conhecimento Comum do Conteúdo), no A05 no qual Rodriguez-Flores *et al.* (2018) fazem o uso do subdomínio (Conhecimento Especializado do Conteúdo), sendo que nesta pesquisa, os autores também tiveram como fundamento a análise didática referenciando (GOMEZ, 2007) e para identificar o conhecimento que os professores colocam em prática, fazem o uso de uma proposta didática desenvolvida por Rojas, Flores e Ramos (2013) e no A04, em que Hatisaru e Erbas (2017) combinam os subdomínios Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), Conhecimento do Conteúdo e Alunos (KCS) e Conhecimento de Conteúdo e Ensino (KCT) para a aprendizagem do aluno a partir de um quadro teórico desenvolvido por Nyikahadzoyi (2015), que permite relacionar tais subdomínios.

O Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) aparece como referencial teórico nos artigos A02, A03 e A06. No A03 é considerado apenas dois subdomínios (Conhecimento dos Tópicos Matemáticos e Conhecimento do Ensino da Matemática) enquanto no A02 e A06 são considerados todos os subdomínios do modelo. Entretanto, nos artigos A03 e A06 considera-se para análise apenas os momentos em que os professores utilizam a analogia. Já no A02 os subdomínios e categorias são utilizados para fazer relações entre o MTSK e o Espaço do Trabalho Matemático (ETM) de Kuzniak (2011) para ampliar a compreensão do conhecimento do professor de Matemática.

No Quadro 8 apresentamos os modelos teóricos sobre o conhecimento de professores de Matemática referenciados nos artigos analisados.

Quadro 8. Referencial teórico adotado para a análise do conhecimento docente

REFERENCIAL TEÓRICO SOBRE O CONHECIMENTO DOCENTE	ARTIGO
***Mathematics Knowledge for Teaching* (MKT)**	A01 - Rodriguez-Flores *et al.* (2016); A04 – Hatisaru e Erbas, (2017); A05 - Rodriguez-Flores *et al.* (2018).
***Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK)**	A02 – Espinoza-Vásquez *et al.* (2016); A03 - Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017); A06 – Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yáñez (2018).
Espaço de Trabalho Matemático (ETM)	A02 – Espinoza-Vásquez *et al.* (2016).

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

3.2.3 Quanto aos procedimentos metodológicos

Os dados nos indicam que as pesquisas analisadas, em geral, têm sido realizadas por meio de estudos de caso qualitativos, a partir da observação e gravação das aulas em áudio e vídeo. Além disso, observa-se a preferência dos autores em analisar professores que já possuem experiência no nível em que estão lecionando.

Além da experiência, o sujeito (Arturo) escolhido por Espinoza-Vásquez *et al.* (2016) no A02 foi apontado como bom professor por seus colegas de trabalho e superiores, o que influenciou os autores a escolhê-lo para estudo. Diferencia-se o A04, no qual o processo de escolha dos professores a serem analisados foi a partir do desempenho em um teste proposto para analisar o conhecimento do conteúdo de Funções, sendo selecionados para análise um professor com o conhecimento considerado forte (Fatma) e o outro com o conhecimento de considerado fraco (Ali) (HATISARU; ERBAS, 2017) onde os autores justificam a escolha pelo fato de obter maiores comparações entre o conhecimento mobilizado por eles e o aprendizado de seus alunos.

Em relação aos instrumentos de coleta de dados, há exclusividade nas gravações de áudio e vídeo, tanto das aulas como das entrevistas que foram utilizadas apenas nos artigos A04 e A06, sendo que uma entrevista foi realizada uma semana antes das observações (A04) e outra depois da observação (A06). Nos artigos A03 e A06 foram considerados apenas os episódios em que os professores faziam o uso da analogia para ensinar os conceitos básicos de Funções, enquanto no A02 Espinoza-Vásquez *et al.* (2016) consideram apenas os momentos em que o professor propõe uma tarefa para calcular imagens e pré-imagens. Diferencia-se o instrumento utilizado no artigo A02 em que foi aplicado um teste para analisar o conhecimento do conteúdo mobilizado pelos professores. No quadro 9, apresentamos os instrumentos de coleta e as características dos sujeitos investigados nos artigos analisados.

Quadro 9. Instrumento de coleta e sujeitos das pesquisas

ARTIGO	INSTRUMENTOS DE COLETA	SUJEITOS
A01 – Rodriguez-Flores *et al.* (2016).	Gravações das aulas em áudio e vídeo.	1 professor (Costa Rica) com experiência.
A02 – Espinoza-Vásquez *et al.* (2016)	Gravações das aulas em áudio e vídeo e transcrição dos episódios.	1 professor com experiência e considerado bom professor por seus colegas e superiores.
A04 – Hatisaru e Erbas (2017)	Teste para analisar o conhecimento do conteúdo, entrevista e gravação das aulas em áudio e vídeo.	2 professores (Turquia) com experiência, sendo um deles (Fatma) com o conhecimento do conteúdo considerado forte e o outro (Ali) com o conhecimento do conteúdo considerado fraco.
A03 - Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017).	Gravações das aulas em áudio e vídeo.	1 professor (Chile) com experiência.
A05 – Rodriguez-Flores *et al.* (2018).	Gravações das aulas em áudio e vídeo.	1 professor (Costa Rica) com experiência.
A06 – Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yáñez (2018)	Gravações das aulas em áudio e vídeo e entrevista semiestruturada gravada em áudio e vídeo.	2 professores (Chile) de uma escola privada.

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

3.2.4 *Quanto ao nível de ensino*

Os autores buscaram observar os professores de Matemática ao ensinar, principalmente, os conceitos básicos de Funções na Educação Básica a partir da observação da prática docente no nível de Ensino Médio (A01, A03 e A05). No artigo A04 os professores analisados lecionam no 9º ano em uma escola de Ensino Médio profissional e nos artigos A02, A03 e A06 não ficou evidente o nível de ensino em que as observações foram realizadas.

Quadro 10. Nível de ensino

ARTIGO	NÍVEL DE ENSINO
A01 – Rodriguez-Flores *et al.*, (2016).	Ensino Médio.
A02 – Espinoza-Vásquez *et al.* (2016).	Não identificado.
A03 - Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017).	Não identificado.
A04 – Hatisaru e Erbas (2017).	Ensino Médio Profissional.
Artigo 5 – Rodriguez-Flores *et al.*, (2018).	Ensino Médio.
Artigo 6 – Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yáñez (2018).	Não identificado.

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2021).

3.2.5 Quanto aos resultados e conclusões

A definição de Função e seus conceitos são introduzidos pelos professores a partir de tarefas exploratórias, analogias ou exemplos. Enquanto nos artigos A01 e A05 inicia-se com a resolução de um problema que se aproxima do cotidiano dos estudantes (corrida de táxi em função da quilometragem rodada), nos artigos A03 e A04 adotam-se uma analogia de Funções como uma máquina de lavar, uma máquina de moer café e um telefone. Entretanto, um dos professores do A04 (Ali) acredita que os conceitos de Função são relevantes apenas para fins escolares, como as avaliações internas e externas e inicia apresentando as definições e exercícios como exemplo.

Já no artigo A06, os professores se apropriam das mesas, cadeiras, bandas favoritas dos estudantes e seus respectivos nomes e apelidos para dar exemplos de relações. Além disso, um dos professores do A06 (Jaime) faz o uso da analogia de uma Função com uma máquina de doces para explicar uma atividade a seus estudantes. Tais ações têm o propósito de simplificar a linguagem formal da definição apresentada. No A04 são apresentadas aos estudantes as definições formais que aparecem no livro didático, e um dos professores (Ali) dá exemplo de como encontrar imagens e pré-imagens de Funções algébricas. No A02, Arturo também utiliza exemplos para determinar a imagem e a pré-imagem de uma Função a partir da expressão algébricas e por um diagrama de flechas, ensinando como encontrá-las por estimações (imagem) ou através da resolução de equações lineares (pré-imagem).

Os dados mostram o amplo conhecimento que os professores de Matemática têm sobre Funções e suas propriedades (conjunto de partida, conjunto de chegada – A06 e univalência –

A04 e A06), apresentando sua definição como relação de dependência nos artigos A01, A03, A04 e A06 e como uma transformação no artigo A03.

Nos artigos A01, A03, A04 e A05 os professores analisados conhecem algumas aplicações dos conceitos de Funções (tarifa de táxi, funcionamento de máquinas, telefone, estojo, cálculo do peso de uma baleia adulta). Dessas aplicações, destaca-se a resolução da tarefa sobre o valor da corrida de táxi, utilizada pelo professor do A05, na qual o sujeito avaliou os diferentes procedimentos e validou os algoritmos utilizados por seus estudantes ao longo da resolução. Os professores dos artigos A01, A02, A04, A05 e A06 conhecem um procedimento para determinar a imagem e pré-imagem de uma Função, sendo elas a substituição de variáveis, resolvendo uma equação ou através de estimações.

Em relação ao conhecimento sobre procedimentos para determinar imagem e pré-imagem, Arturo (A02) também ensina quando deve usá-los, evidenciando o seu Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT), seu Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) e seu Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT). Arturo (A02) também leva em consideração o conhecimento prévio dos seus estudantes, evidenciando o seu Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS). Diferencia-se dos demais artigos as instruções apresentadas pelo professor no A05 para formar pares ordenados (seguir a ordem, variável dependente "vírgula" variável dependente) e esboçar gráficos (junção dos pares ordenados). No A04, Ali e Fatma também conhecem o procedimento do teste de linha vertical para verificar se um gráfico corresponde a uma relação funcional, mas não o utilizam para o ensino.

Destacam-se nas produções alguns exemplos que são apresentados pelos professores para facilitar a compreensão dos estudantes. No A04, Ali faz o uso de exemplos para determinar a imagem e pré-imagem de Funções algébricas e Fatma cita exemplos do conceito de Função em objetos (estojo, telefone e máquinas). No A05, os exemplos possibilitam as relações entre os conceitos de relação, quantidade constante, quantidade variável, variável dependente e variável independente a partir de um problema (peso de uma baleia). Já no A03, Arturo ensina com números para exemplificar e trabalhar o domínio-alvo de uma Função. Por sua vez, no A06 os exemplos são apresentados no início da aula, conforme mencionado anteriormente. Os exemplos apresentados no A02 são voltados para a resolução das atividades de cálculo da imagem e pré-imagem de uma Função, dos quais são destacados os diferentes planos do professor para resolver o mesmo problema, o que, segundo os autores, evidenciam as aproximações semióticas e instrumentais.

Os professores dos artigos analisados conhecem e usam diferentes registros de representação para uma função (verbal, algébrica, diagrama de Venn, tabular, gráfica e pictórica). O diagrama de Venn e a representação gráfica aparecem nos artigos A01, A02, A04 e A05, as representações verbais aparecem nos artigos A03 e A05, enquanto a representação algébrica está presente em todas as produções analisadas. Arturo (A03 e A06) também utiliza a representação pictórica ao desenhar uma máquina funcional na lousa. A representação tabular aparece apenas no artigo A05, onde destaca-se que o professor faz relações entre as representações do diagrama de Venn, tabulares e gráficas para explicar os conceitos de imagem, pré-imagem e par ordenado (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018). No artigo A02, o diagrama de flechas é utilizado por Arturo para identificar os elementos dos conjuntos de entrada e saída, relacionando a gênese semiótica com o Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT).

Quanto às relações entre diferentes representações de Função, No A06 Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yáñez (2018) destacam o uso do diagrama sagital (diagrama de Venn) e a representação algébrica ($y = f(x)$) de Arturo e Jaime. No A03, Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017) destacam também que a estratégia de ensino de Arturo é fortemente influenciada pelo seu conhecimento sobre os diferentes registros de representação e as definições que ele conhece. Já no A02, Espinoza-Vásquez *et al.* (2016) destacam as escolhas dos tipos de representação, exemplos e explicações do professor favorecem o ensino de Funções, relacionando os polos do ETM com o Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT). Em particular, Fatma busca ensinar a seus estudantes a interpretarem gráficos de Funções (HATISARU; ERBAS, 2017).

No A01, Rodriguez-Flores *et al.* (2016) destacam o conhecimento que o professor tem para reforçar o conhecimento matemático a partir das respostas ou intervenções adequadas e inadequadas de seus estudantes e também o conhecimento sobre a relação entre os conceitos de Funções relacionados a outros temas (relação entre conjuntos). No A05, o professor reconhece a dificuldade dos alunos em formar um par ordenado quando se fala em abscissa e ordenada, então explica como reconhecê-las a partir das variáveis dependente e independente.

No A02, Arturo leva os alunos a um desequilíbrio cognitivo quando pede para os mesmos determinarem a imagem e a pré-imagem de uma outra Função, mostrando seu conhecimento sobre as Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM), enquanto no A04 Fatma conhece a dificuldade que os estudantes têm em reconhecer Funções constantes e descontínuas. Além disso, Fatma também reconhece a facilidade que os mesmos têm em reconhecer relações funcionais através do diagrama de Venn.

Já no A06, Arturo reconhece que os estudantes têm dificuldade na compreensão de novos conceitos (domínio e contradomínio) e Jaime reconhece que a analogia feita por ele (Função como uma máquina de doces) é útil apenas durante o início do conteúdo de Funções e que depois de um tempo os alunos nem se lembrariam da comparação feita por ele, evidenciando o Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM). Diferencia-se dos demais artigos a prova matemática por contradição utilizada por Fatma (A04) para verificar se algumas das relações apresentadas no teste de conhecimento eram ou não funcionais, e assim fazer uma generalização matemática.

3.2.6 Quanto aos conhecimentos especializados que aparecem nas pesquisas

A partir da análise vertical dos indícios e evidências dos conhecimentos especializados que aparecem nos artigos, sintetizamos os conhecimentos encontrados por domínios e subdomínios no Quadro 11 e em seguida os descrevemos por categorias do MTSK.

Quadro 11. Conhecimentos especializados que aparecem nas produções

DOMÍNIOS	SUBDOMÍNIOS	CONHECIMENTO
CONHECIMENTO MATEMÁTICO (MK)	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (**KoT**)	- Definições de Função como uma relação de dependência e transformação; - Propriedades (domínio, contradomínio e imagem e Relações de unicidade e exclusividade que foram utilizadas para definir Função; - Registros de representação de uma Função (verbal, algébrico, tabular, gráfico e pictórico); - Procedimentos: determinar o valor da imagem de uma Função através da substituição de variáveis através de uma equação y = f(x), formar pares ordenados pela ordem (pré-imagem, imagem), esboçar o gráfico de uma Função utilizando o conceito de pares ordenados, teste de linha vertical para verificar se um gráfico corresponde a uma relação funcional, determinar o valor da imagem de uma Função por estimativas e determinar o valor da pré-imagem a partir de uma equação; - Aplicações do conceito de Funções relacionados ao processo de funcionamento de uma máquina de lavar que se configura em um processo de entrada-saída, no cálculo do salário de um vendedor de revistas em função do número de revistas vendidas, no

		funcionamento de uma máquina de moer café e em alguns objetos (estojo, gravador de voz e telefone) e uma aplicação a um problema que envolve o peso P em toneladas de uma baleia adulta em relação ao seu comprimento L.
	Conhecimento da Estrutura Matemática (**KSM**)	- Conexão de simplificação entre o tópico de Funções e o de Equações no qual o problema de encontrar a quilometragem rodada por um passageiro do táxi a partir do dinheiro disponível se reduz a uma pequena equação; - Uma conexão auxiliar do tema de Funções com o de Área da circunferência para identificar as variáveis dependente e independente; - Uma conexão auxiliar entre o tema de Funções e Equações utilizado para determinar imagem e pré-imagem a partir da equação $y = f(x)$.
	Conhecimento da Prática Matemática (**KPM**)	- Exemplificações de relações que não correspondem a uma Função; - Validar os procedimentos e resultados apresentados pelos estudantes; - Prova por contradição e generalização matemática.
CONHECIMENTO DIDÁTICO DO CONTEÚDO (PCK)	Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (**KFLM**)	- Dificuldades dos estudantes em formar pares ordenados quando se fala em abscissa e ordenada; - Dificuldade dos estudantes em determinar a pré-imagem de uma Função por estimativas; - Contextualizar um problema a uma situação pessoal que se encontra dentro da expectativa dos estudantes (notas dos estudantes em uma avaliação); - Dificuldade dos estudantes em reconhecer Funções constantes e descontínuas como relações funcionais; - Potencialidade em reconhecer relações funcionais a partir do diagrama de flechas; - Possível erro ao traçar sempre uma reta por dois pontos no plano cartesiano; - Dificuldades dos estudantes na compreensão de conceitos matemáticos formais (definição formal de Função);

		- Possíveis dificuldades e facilidades dos estudantes determinarem o valor 9/5; - Uma situação que se encontra dentro de um contexto familiar aos estudantes (máquina *dispenser*), que é utilizada para facilitar a compreensão da definição apresentada, uma vez que todos conhecem o funcionamento da máquina;
	Conhecimento do Ensino da Matemática (**KMT**)	- Tarefas exploratórias como o valor de uma corrida de táxi em função da quilometragem rodada, salário de um vendedor de revistas em função do número de revistas vendidas, determinar a lei de formação a partir dos elementos de dois conjuntos, adaptação de tarefas encontradas em livros didáticos e tarefas para se determinar a imagem de uma Função por estimações; - Exemplos para facilitar a compreensão dos estudantes (a nota dos estudantes em função do seu desempenho na avaliação, trabalhar o domínio-alvo de uma Função ao ensinar com números, um problema físico relacionado ao peso de uma baleia que depende de seu comprimento e a relação entre o nome dos estudantes e seus respectivos sobrenomes ou entre seus nomes e suas respectivas bandas favoritas), exemplos para determinar imagem de uma Função algébrica; - Ensino por resolução de problemas. - Estratégias de ensino de fazer uma analogia de Funções com uma máquina de doces e uma de lavar roupas para determinar a imagem e pré-imagem de uma Função em determinada atividade, analogia do conceito de Função como uma máquina de moer café com uma de lavar e com o telefone; - Livro didático como recurso físico para o ensino de Funções; - Explicações de quando cada procedimento deve ser utilizado para encontrar imagem e pré-imagem; - Organização didática ao selecionar os tipos de

		representação, os exemplos dados e as explicações.
	Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (**KMLS**)	- Conceitos ensinados que serão utilizados mais adiante (pares ordenados para a construção dos gráficos no plano cartesiano); - Habilidade que os estudantes deverão adquirir para reconhecer que um gráfico ou um conjunto de pares ordenados é uma relação funcional; - A importância da compreensão total do tópico de Funções para o aprendizado de tópicos mais avançados; - Conhecimentos prévios dos estudantes sobre equações lineares e desigualdades.

Fonte: Quadro produzido pelo autor (2022).

- **Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)**

Definições, propriedades e seus fundamentos: no artigo A01 o professor conhece uma relação entre os elementos dos pares ordenados que será necessária para definir uma Função, em que pares ordenados são as “associações que fazemos com os elementos de A e os elementos de B” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 9, tradução nossa). E introduz os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem. enquanto no artigo A06, Arturo e Jaime conhecem as propriedades de unicidade e arbitrariedade de imagens que são utilizadas para definir Função.

Já no artigo A04, Ali conhece a propriedade de univalência e aproveita uma atividade para mencionar uma condição necessária para que uma relação seja uma Função através do exemplo de que “Soner comeu Kebap; uma flecha vai de Soner a Kebap. Se ele também comesse feijão, isso entraria em conflito com a regra” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa) e Fatma também conhece esta propriedade que é necessária para “decidir a funcionalidade de relações de correspondência de conjuntos” (HATISARU; HERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa).

Nos artigos A01, A03, A04 e A06 a definição de Função é apresentada como relação de dependência, que consiste em “uma relação que tem duas condições importantes, cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento do segundo conjunto” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 11, tradução nossa), uma relação em que “cada elemento do conjunto de entrada corresponde a um único elemento de saída” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3291, tradução nossa), uma lei de correspondência na qual “cada elemento de um conjunto corresponde conforme necessário a um elemento do segundo conjunto” (HATISARU; HERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa) e também como “uma regra levando um elemento a outro elemento ou a si mesmo” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715, tradução nossa) e uma relação entre dois conjuntos em que, “para cada elemento desse conjunto é atribuído um único elemento de outro conjunto” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 312, tradução nossa).

No artigo A04, Ali e Fatma também apresentam conhecimento sobre a definição de Função como “uma transformação de objetos em uma entidade diferente sob um determinado processo” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa).

Fenomenologias e aplicações: Uma aplicação de Função no cálculo do valor de uma corrida de táxi para introduzir seus conceitos é apresentada pelo professor nos artigos A01 e A05 e a utiliza para “introduzir o conceito de função” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 97, tradução nossa). O professor do artigo A01 também conhece uma aplicação para determinar o salário quinzenal de um vendedor de revistas e o utiliza para “introduzir o conceito de imagem e pré-imagem” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa). No artigo A03, o professor conhece uma aplicação de Função no funcionamento de uma máquina de lavar roupas, que consiste em uma máquina que “realiza a função de lavar” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3291, tradução nossa).

No artigo A04, Fatma também conhece a aplicação do conceito de Função em uma máquina de lavar, assim como em outros objetos (estojo, gravador de voz, e telefone), enquanto Ali reconhece a aplicação dos conceitos em uma máquina de moer café através de processo no qual “os grãos de café sendo colocados na máquina, sendo expostos a um processo e terminando em forma de pó” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa). Por sua vez, no artigo A05, o professor faz o uso de um problema físico (diz ele), que consiste em uma aplicação de Função no qual “o peso esperado P de uma baleia se relaciona com o seu comprimento L” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 99, tradução nossa).

Registros de representação: no artigo A02, Arturo utiliza duas representações, sendo elas o “diagrama sagitário” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 201, tradução nossa) para observar a relação entre os elementos de dois conjuntos e também a representação dada por uma “expressão algébrica” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 201, tradução nossa). No artigo A05, o professor representa uma Função através do diagrama de Venn, da forma algébrica e por meio de gráficos, o que consiste em três diferentes representações de uma Função, destacando que “podemos especificar uma relação por meio de diagramas de Venn ou por meio de uma lista de pares ordenados que definem a relação, gráfico" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa).

O professor do artigo A05 também faz o uso das representações algébricas, numéricas, verbais, diagrama de Venn, tabulares e gráficas, o que consiste em diferentes formas de representar uma Função, das quais "o uso das representações verbal, algébrica e numérica foi frequente" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 101, tradução nossa). Em um dos exemplos utilizou "os sistemas de representação icônicos e algébricos e estabeleceu relação entre eles e incluiu o sistema tabular quando trabalhava o conceito de contradomínio" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 101, tradução nossa) e para os conceitos de Função, imagem e pré-imagem utilizou "os sistemas de representação tabular e gráfico" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 101, tradução nossa).

No artigo A03, "o professor desenha uma máquina de lavar no quadro branco" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3293, tradução nossa) que consiste em um registro pictórico de Função, que será utilizada como uma técnica de ensino por analogia no subdomínio do ensino. Ainda, neste artigo, aparecem outras representações (verbal e algébrica) quando em um determinado trecho o professor diz aos estudantes "isso (a função) vai adicionar dois a tudo o que vier [ele escreve "f (x) = x + 2"]. Tudo o que entra na função, na máquina, eu adiciono dois a ela" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3293, tradução nossa).

No artigo A04, Ali utiliza três diferentes representações de uma Função, sendo elas "f(x) = 2x + 1 (algébrica), na forma de pares ordenados e diagrama de flechas" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 713, tradução nossa), sendo que a mais utilizada por ele foi a algébrica. No mesmo artigo, Fatma conhece diferentes representações de uma Função, sendo elas a algébrica na forma "f(x) = y" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715) e cita que a mesma relação poderia ser mostrada também "como um diagrama" (HATISARU; ERBAS, 2017, p.715, tradução nossa).

No artigo A06, "Jaime trabalha as relações entre conjuntos fazendo o uso do diagrama sagital" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 312, tradução nossa), o que consiste em uma representação de Função por diagramas de Venn. Além disso, Jaime "faz a avaliação de uma expressão algébrica" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 314, tradução nossa), que consiste em uma representação algébrica ($y = f(x)$) de uma Função, e que é aproveitada para o ensino de um procedimento que será apresentado em outra categoria deste subdomínio. Por sua vez, ao apresentar a definição de Função, Arturo "faz um diagrama sagital no qual mostra uma correspondência entre os elementos do conjunto A e B a partir de elementos genéricos a, b, x e y" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 315, tradução nossa), que consiste em uma representação de Função através do diagrama de Venn.

Procedimentos: no artigo A01, o professor ensina como determinar a imagem de uma Função, substituindo o valor da pré-imagem na lei de formação, o que consiste em um procedimento no qual "se substitui a variável independente pelo valor que estão me dando e já encontramos uma imagem" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa) e também um procedimento para determinar o gráfico de uma Função que tem o domínio finito: "Sempre que o domínio for dado por um conjunto finito de elementos, o gráfico da função será apenas a localização dos pares ordenados" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 14, tradução nossa). O professor também conhece um procedimento para determinar o domínio-alvo de uma Função quando o seu domínio for formado por um conjunto finito de elementos. "Portanto, para calcular o escopo, preciso calcular a imagem de cada um desses elementos" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 13, tradução nossa).

No artigo A02, são ensinados dois procedimentos para determinar a imagem e a pré-imagem de uma Função, seja por "estimativas ou a realização do processo inverso para o que é estabelecido pela função" (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 202, tradução nossa) e um procedimento para determinar a pré-imagem de uma Função que "vira uma equação (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 203, tradução nossa)".

No artigo A04, Ali busca ensinar aos alunos como determinar o valor da "imagem ou pré-imagem de uma Função" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa), que consiste em um procedimento para determinar valores desconhecidos através da substituição de variáveis. Ali também usou o teste de linha vertical para identificar se alguns gráficos eram relações funcionais, tal procedimento também foi usado por Fatma com o mesmo propósito (HATISARU; ERBAS, 2017).

No artigo A05 é explicado aos estudantes um procedimento para montar os pares ordenados que "sempre manterá esta ordem "x" vírgula "y", primeiro a pré-imagem depois a imagem" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa). No artigo A06, Jaime aproveita a "expressão algébrica ($f(x) = y$) para determinar imagens e pré-imagens" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 314, tradução nossa) de uma Função, que consiste em um procedimento para determinar a imagem e pré-imagem através da equação f(x) = y.

- **Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM)**

Conexões de simplificação: no artigo A05, o professor faz uma conexão entre os temas de Função e Equação para resolver um problema (corrida de táxi) em que o cálculo se "reduz a uma pequena equação" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 98, tradução nossa), o que consiste em uma conexão realizada para simplificar a resolução do problema apresentado.

Conexões auxiliares: uma conexão entre o tema de Funções com o cálculo da área de uma Circunferência aparece no artigo A01, na qual o professor analisado faz o uso de tal conexão para apresentar as variáveis dependente e independente: "A área é a variável dependente, então r [raio] seria a variável independente" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 10, tradução nossa). Para determinar as imagens e pré-imagens de uma Função, no artigo A06 Jaime faz o uso de uma equação f(x) = k, que consiste em uma conexão entre Funções e Equações estabelecida com a finalidade de auxiliar a "determinar a pré-imagem de um valor de saída" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2018, p. 314, tradução nossa). A conexão do tema de Funções com o tema de Equações também aparece no artigo A02 com o mesmo propósito, em que se determina a pré-imagem de uma Função no momento em que ela "vira uma equação" (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 2013, tradução nossa).

- **Conhecimento da Prática Matemática (KPM)**

Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar: no artigo A01, um diagrama é apresentado pelo professor aos estudantes para mostrar uma relação que não corresponde a uma Função, algo que consiste em um contraexemplo em que o número do conjunto do domínio se relaciona com mais de um elemento do contradomínio: "O 3 (elemento do conjunto do domínio) está associado a dois elementos" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa).

No artigo A04, ao analisar se algumas relações eram Funções, Fatma "usava o método da prova por contradição" (HATSARU; ERBAS, 2017, p. 117, tradução nossa), que consiste em uma prova matemática e, ao verificar que tal relação correspondia a uma Função, ela "fez uma generalização como $\forall x \in N, x + 2 \in N$" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 117, tradução nossa). No artigo A05, o professor "valida os procedimentos e soluções apresentadas no quadro pelos estudantes" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 98, tradução nossa), o que consiste em um conhecimento do processo de construção matemática para validar os procedimentos e as soluções apresentadas.

Ainda, no artigo A05, o professor faz uma comparação entre Funções e as notas dos estudantes em uma avaliação de modo que os alunos percebam que um estudante não pode tirar duas notas distintas em uma mesma avaliação, o que consiste em uma exemplificação de uma relação que não corresponde a uma Função, na qual "não faz sentido dizer que E1 tirou 70 e ao mesmo tempo tirou 100" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa).

- **Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM)**

Potencialidades e dificuldades de aprendizagem: no artigo A01, o professor reconhece que os estudantes têm dificuldade em formar pares ordenados quando se refere aos eixos das abscissas e das ordenadas, então explica como formá-los pela ordem pré-imagem (x) e imagem (y): "Por aí me perguntava um amigo que não entendia dois conceitos (par ordenado e gráficos), porque falava em formar um par ordenado onde falava de abscissa e ordenada" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa).

No artigo A04, Fatma conhece diferentes dificuldades que os estudantes terão na aprendizagem de Funções como em não reconhecer Funções em que "a imagem dos elementos do conjunto do domínio era única (Funções constantes)", "não reconhecer funções descontínuas porque os gráficos estavam desconectados e não reconhecer funções verbais visto que não envolve x" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715, tradução nossa). Fatma também conhece uma potencialidade dos estudantes, afirmando que os mesmos "reconheceriam facilmente que a relação era função através do diagrama de flechas e também um possível erro dos estudantes ao traçar sempre uma reta por dois pontos distintos no plano cartesiano sendo que um número infinito de gráficos passando pelos pontos A e B poderiam ser desenhados" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715, tradução nossa).

No artigo A06, Arturo reconhece a dificuldade que os estudantes do primeiro ano têm para compreender "uma definição matemática" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 317, tradução nossa) formal, e sugere como alternativa potencializar essa compreensão, "fazer uma explicação dela (definição) usando sinônimos de forma que eles possam compreender o que está escrito ali, o que você quer dizer" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018b, p. 317), o que consiste em um conhecimento sobre a dificuldade dos alunos em relação a compreensão de novos conceitos e uma alternativa que potencialize tal compreensão.

Por sua vez, no artigo A02 o professor reconhece que os estudantes têm dificuldade em determinar a pré-imagem de uma Função por estimativas e leva os alunos intencionalmente a um "desequilíbrio cognitivo" (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 202, tradução nossa), mudando a Função de modo que “não seja tão óbvio” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 202, tradução nossa) o número colocado para que a Função chegue a zero e o conhecimento sobre possíveis dificuldades ou facilidades que alguns estudantes terão para encontrarem o valor (9/5) em uma das atividades ao mencionar que “para alguns podem ser simples e para outros não” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 204, tradução nossa).

Aspectos emocionais de aprendizagem matemática: o professor analisado no artigo A05 utilizou “um problema contextualizando a uma situação pessoal” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa) do estudante para o conceito de relação, o que consiste em um problema que contextualiza uma situação pessoal dentro da expectativa de interesse dos estudantes.

Interação dos estudantes com o conteúdo: Jaime (A06) reconhece que a comparação feita por ele (analogia) pode ser “útil para iniciar o processo de ensino” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 315, tradução nossa), uma vez que todos os estudantes já tenham se deparado e comprado em uma máquina *dispenser*, o que consiste em um conhecimento sobre uma situação que seja familiar aos estudantes, já que todos conhecem o funcionamento da máquina.

- **Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)**

Teorias de ensino:

No artigo A06, o professor introduz os conceitos de Função a partir do problema da corrida de táxi, pedindo para que os estudantes o resolvam em grupo e depois apresentem suas respectivas resoluções no quadro, aproveitando-se das respostas dos estudantes para validar os procedimentos utilizados por eles durante a resolução, o que consiste em um ensino através da resolução de problemas em que “o problema proposto estava dentro do contexto de interesse de seus alunos e faz parte dos eixos transversais propostos no Currículo - resolução de problemas” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 97, tradução nossa).

Recursos de ensino (físicos e digitais): no artigo A04, Ali se apropria de um livro didático para “decidir a ordem e o conteúdo de seu ensino” (HATISARU, ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa), enquanto Fatma “as vezes usava” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 716, tradução nossa) o mesmo material para adaptar atividades para seus estudantes, o que consiste em um recurso físico para o ensino de Funções.

Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos: no artigo A01 aparecem duas tarefas, a corrida de táxi, em que o valor da corrida depende da quilometragem rodada em que o professor a utiliza para "estabelecer uma lei de formação e a estimação de distancias percorridas a partir do dinheiro disponível" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa) e a tarefa sobre o salário quinzenal do vendedor de revistas, em que o salário depende do número de revistas vendidas "para introduzir o cálculo de imagem e pré imagem" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.* 2016, p. 12, tradução nossa).

Ao trabalhar o domínio alvo de uma Função, o professor analisado no artigo A02 faz o uso de um exemplo com números: "O que quer que entre na função, eu adiciono dois a ela" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3293, tradução nossa). No artigo A06, para facilitar a compreensão de variável dependente e independente, o professor cita "um exemplo diferente já da parte física, diz ele, o peso esperado P em toneladas de uma baleia adulta se relaciona com o seu comprimento L" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 99, tradução nossa) e também "uma tarefa em um contexto de interesse dos estudantes para identificar os elementos de uma função" (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa) referente à nota dos estudantes em uma avaliação que pode variar entre 0 e 100, enfatizando que o estudante não poderia obter notas distintas em uma mesma avaliação.

No artigo A04, Ali cita que poderia usar exemplos da "vida cotidiana como por exemplo a moagem do trigo" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa) que consiste em um exemplo para facilitar a compreensão do conceito de Função. Durante o ensino, Ali utilizou diferentes exemplos voltados para determinar "a imagem de funções algébricas" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa), um exemplo para determinar a "função por meio de uma lista de mapeamento" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 713, tradução nossa) e fez uma analogia do conceito de Função e o "processo de uma máquina" (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa) de moer café, que consiste em uma estratégia de ensino para facilitar a compreensão do conceito. Fatma também utiliza tal estratégia de ensino ao fazer "algumas analogias de função como uma máquina de lavar e um telefone e implementou duas tarefas, uma em que os alunos devem descobrir uma regra que mapeia os elementos pertencentes a dois conjuntos e uma tarefa adaptada do livro didático" (HATISARU; ERBAS, p. 716, tradução nossa). O professor, analisado no artigo A03, também faz o uso de uma analogia de Função como uma máquina de lavar roupas, o que consiste em uma estratégia de ensino que favorece a compreensão dos estudantes em que "a função funciona como uma espécie de máquina. Um exemplo pode ser uma máquina de lavar. Uma máquina de lavar realiza uma função" (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3291, tradução nossa).

Já no artigo A06, Jaime estabelece relações entre o nome dos estudantes e seus respectivos sobrenomes e também entre o nome dos alunos e suas respectivas bandas favoritas, o que consiste em dois exemplos que são apresentados para estabelecer “condições para definir o conceito de função” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 312, tradução nossa).

Para auxiliar na compreensão de seus alunos no cálculo de imagem e pré-imagem, Jaime (A06) faz uma analogia do processo que realiza uma Função com uma máquina de doces, o que consiste em uma estratégia de ensino que tem como finalidade “ajudar seus alunos a compreender e realizar o cálculo de imagem e pré-imagem, estabelecendo a analogia a partir de sua natureza funcional” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, p. 313, tradução nossa).

Também no artigo A06, Arturo estabelece uma analogia da definição de Função com uma máquina de lavar roupas, o que consiste em uma estratégia de ensino que tem como finalidade facilitar a compreensão dos estudantes sobre a definição de Função como um processo de entrada e saída, em que a roupa suja seria o elemento do conjunto de saída e “a roupa limpa seria a chegada” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 316, tradução nossa), realizando, assim, a função de lavar. No artigo A02, o professor propõe “uma tarefa agora com o uso de outra representação”, a representação algébrica. Ainda neste artigo, Arturo demonstra uma organização didática ao selecionar os tipos de representações, os exemplos dados e as explicações” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 202).

- **Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS)**

Resultados esperados de aprendizagem: no artigo A04, Fatma reconhece uma habilidade que seus estudantes deverão adquirir para que “sejam capazes de identificar se um gráfico ou um conjunto de pares ordenados é uma função” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715, tradução nossa).

Sequenciação de tópicos: no artigo A04, Fatma conhece a necessidade de compreensão total do tópico de Funções para “ajudar os alunos a aprenderem tópicos mais avançados” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 716, tradução nossa). Quando o professor analisado no artigo A06 explica o conceito de pares ordenados, ele destaca que os mesmos serão utilizados posteriormente ao estudarem o plano cartesiano: “Mais adiante veremos o plano cartesiano, e para localizar pontos no plano cartesiano” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.* 2018, p. 100, tradução nossa), que consiste em um conceito que será necessário em um tópico futuro. No artigo A02, Arturo conta com um conhecimento prévio dos estudantes sobre "equações e desigualdades" (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 203, tradução nossa).

3.3 RETOMADA DAS QUESTÕES DA PESQUISA

Diante das análises realizadas retomaremos às questões norteadoras da pesquisa para respondê-las: **quais as principais características das pesquisas científicas com o foco no conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica?**

As pesquisas têm como foco principal analisar o conhecimento do professor de Matemática ao ensinar, principalmente, os conceitos básicos de Funções, fazer relações entre os conhecimentos colocados em jogo pelos professores e relacionar os conhecimentos do professor com os resultados de aprendizagem de seus alunos. As produções se caracterizam exclusivamente pelo tipo de pesquisa qualitativa, tendo como preferência a análise de professores que atuam principalmente no Ensino Médio, onde os conceitos de Função são mais aprofundados (ARAUJO, 2018). Em particular, uma das produções realiza a análise em uma escola de Nível Médio profissional. Além disso, observa-se a preferência por professores que já possuem experiência neste nível de ensino. Apesar do critério de seleção do artigo A04 (teste de conhecimento dos conceitos de Função) se diferenciar dos demais artigos, os sujeitos analisados também já possuem certa experiência.

Os dados são coletados através das gravações de áudio e vídeo das aulas em que os professores iniciam a introdução dos conceitos básicos de Função e em algumas produções também se apropriam de entrevistas, que ocorrem antes da observação (A04) ou depois da observação (A06). Em particular, no artigo A04, o conhecimento matemático dos professores também é analisado de acordo com as respostas apresentadas pelo teste de conhecimento realizado. Quanto ao referencial teórico, observa-se a preferência dos autores por referenciais que se referem aos conhecimentos que são específicos do professor de Matemática, como o *Mathematics Knowledge for Teaching* (MKT), o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) e o Espaço de Trabalho Matemático (ETM).

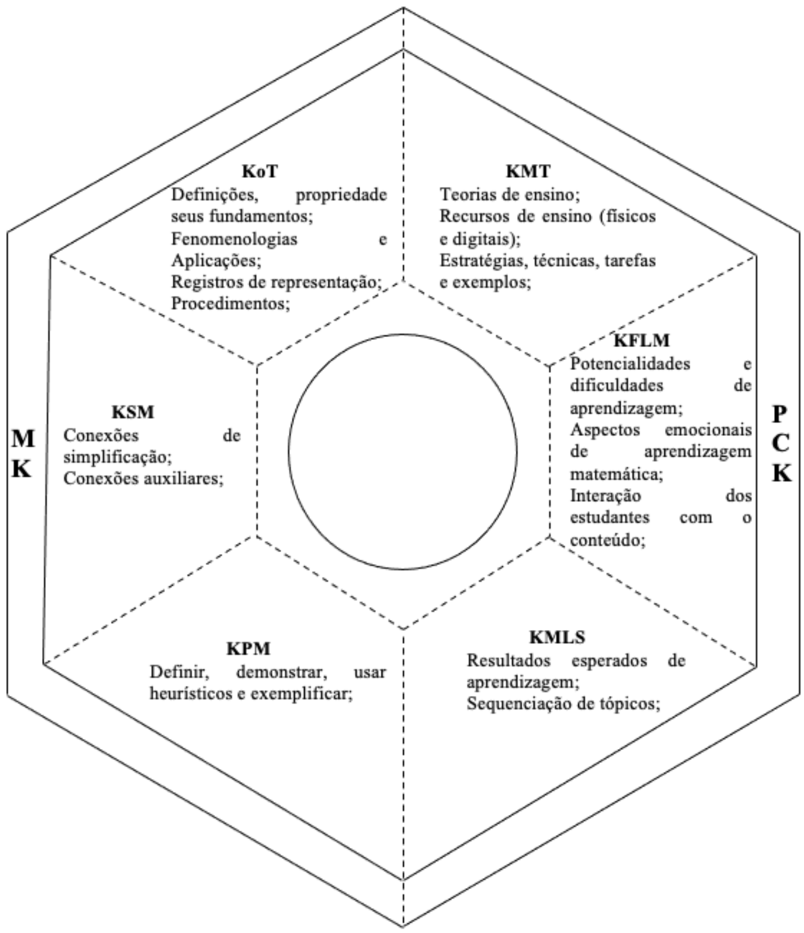
Quais domínios e subdomínios do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* aparecem nas pesquisas?

Os conhecimentos especializados identificados nas produções contemplam tanto o domínio do Conhecimento Matemático (MK) quanto o domínio do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK). Os subdomínios do MK que aparecem nas produções analisadas são:

Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) dentro das categorias de definições, propriedades e seus fundamentos, fenomenologias e aplicações, registros de representações e procedimentos, Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) nas categorias de conexões de simplificação e conexões auxiliares e Conhecimento da Prática Matemática (KPM), definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar.

Já os subdomínios do PCK que aparecem são: Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) dentro das categorias de teorias pessoais e institucionalizadas de ensino e estratégias, técnicas, tarefas e exemplos. Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM) nas categorias de potencialidades e dificuldades associadas à aprendizagem, aspectos emocionais de aprendizagem matemática e interações dos estudantes com o conteúdo. E o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS) dentro das categorias de resultados esperados de aprendizagem e sequenciação de tópicos conforme apresentado na Figura 10.

Figura 10. Subdomínios e categorias identificados nas produções



Fonte: Adaptada de Carrillo *et al.* (2014).

Dentro do subdomínio do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT), os dados nos mostram o amplo conhecimento dos professores sobre as propriedades de unicidade e arbitrariedade entre conjuntos que são utilizadas para definir Funções (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018), que, por sua vez, é definida como uma relação de dependência, em que existe uma relação entre as grandezas do conjunto de entrada e do conjunto de saída (ARAUJO, 2018) e também como uma transformação de objetos.

São identificados conhecimentos sobre aplicações do conceito de Função no cálculo do valor de uma corrida de táxi em função da quilometragem rodada, no salário quinzenal de um vendedor de revistas em que o salário depende do número de revistas vendidas em uma quinzena, no cálculo do peso (P) de uma baleia em função do seu comprimento (L), em uma máquina de moer café e em outros objetos como estojo, gravador de voz, telefone e no funcionamento de uma máquina de lavar. Quanto aos registros de representações de uma Função, aparecem as representações verbal, numérico, algébricas, diagrama de Venn, tabular, gráfica e pictórica, dos quais destaca-se a algébrica, que aparece em todas as produções, considerando que a maioria dos professores sentem a necessidade de representar uma Função desta forma (REZENDE, 2011).

Destaca-se também a relação feita entre os sistemas de representação por diagramas de Venn, tabular e gráfico feito pelo professor analisado no artigo A05, tendo em vista que a relação entre esses registros é vista como um dos pontos fortes da aprendizagem do estudante (ARAUJO, 2018). Quanto aos procedimentos, a substituição de variáveis é utilizada para determinar a imagem ou a pré-imagem a partir da lei de formação ($y = f(x)$), a ordem (x, y) é apresentada como procedimento para formar pares ordenados em que os estudantes devem seguir a ordem pré-imagem “vírgula” imagem e a junção dos pares ordenados no plano cartesiano para esboçar o gráfico de uma Função quando o seu domínio é finito. Aparecem também os procedimentos para encontrar a imagem de uma Função a partir de estimativas e a pré-imagem através da resolução de uma equação linear, o teste de linha vertical para verificar se um gráfico define uma Função e determinar as imagens de uma Função por estimativas.

No Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) há uma conexão de simplificação entre os temas de Funções e Equações que é utilizado para resolver o problema da corrida do táxi, em que o problema é reduzido a uma pequena equação (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016). Também há conexões entre Funções e a Área da circunferência para identificar as variáveis dependente (área) e dependente (raio) e entre Funções e Equações para determinar a pré-imagem e imagem de uma Função a partir da equação $f(x) = k$.

Dentro do subdomínio Conhecimento da Prática Matemática (KPM) são identificados os conhecimentos dos professores ao apresentarem relações que não correspondem a uma Função, que são representados através do diagrama de flechas como contraexemplos em que um mesmo elemento do domínio corresponde a dois ou mais elementos distintos do contradomínio. Uma exemplificação de uma situação que não corresponde a uma Função, em que são relacionadas as notas dos estudantes aos seus respectivos rendimentos em uma avaliação, indicando que um determinado aluno não pode tirar duas notas distintas na mesma avaliação. Um diagrama de flechas apresentado aos estudantes permite que eles vejam que um elemento do conjunto de partida se relaciona com dois elementos distintos do conjunto de chegada, que são possíveis contraexemplos por não se enquadrarem nas propriedades de injetora, sobrejetora e nem bijetora (ARAUJO, 2018).

Ainda referente ao KPM, há também a avaliação e validação do raciocínio dos estudantes durante a resolução de um problema (corrida de táxi). Ao avaliar e validar a tais resoluções, o professor não descarta o primeiro raciocínio do estudante e nem espera que os mesmos já compreendam de forma imediata as definições formais de Função, não colocando em prática a inversão antididática de Freudenthal destacada por Arcavi (1995), o que contribui com o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno. Também, referente a este subdomínio, há uma prova por contradição utilizada para verificar relações funcionais e generalizá-la matematicamente.

No Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT), destacam-se a resolução de problemas como teoria de ensino. Tal forma de ensinar os conceitos de Função adotadas fogem do ensino baseado apenas em definições-exemplos-exercícios apresentados (SANTOS DE SOUZA; SOUZA 2018).

Quanto às estratégias, técnicas, tarefas e exemplos, aparecem as tarefas exploratórias, como as da corrida de táxi e do vendedor de revistas. Também são apresentados exemplos como o problema do peso esperado de uma baleia e seu comprimento, a nota da avaliação em função do seu desempenho, a uma relação entre os nomes dos estudantes e suas bandas favoritas e um exemplo com números para determinar o domínio alvo de uma Função. Destaca-se a organização didática de um dos professores para selecionar os tipos de representações, os exemplos dados e suas explicações. Como estratégia de ensino, há o uso da analogia como uma máquina de doces para ajudar a calcular a imagem e a pré-imagem de uma Função e uma estratégia para ensinar Função a partir da analogia com uma máquina de lavar roupas, uma máquina *dispenser* e uma máquina de moer café, facilitando a compreensão dos estudantes sobre a definição de Função como um processo de entrada e saída. Tais associações são consideradas como um dos pontos fortes de aprendizagem dos alunos (ARAUJO, 2018).

Em relação ao Conhecimento das Características de aprendizagem Matemática (KFLM), os dados mostram o conhecimento sobre as dificuldades dos estudantes em formar pares ordenados quando precisam reconhecer os eixos das abscissas e ordenadas, e também que, no primeiro ano, os estudantes têm dificuldade em compreender uma definição matemática formal. O conhecimento sobre a dificuldade dos estudantes para determinar a pré-imagem de uma Função por estimativas e tendo ciência disso, o professor modifica a atividade para causar um desequilíbrio cognitivo nos estudantes. E também o conhecimento sobre possíveis dificuldades ou facilidade que diferentes estudantes terão para encontrar um número racional (9/5) como pré-imagem de uma Função. Por outro lado, há o conhecimento sobre uma alternativa para potencializar a compreensão dos alunos sobre a definição formal de Função que parte da ideia de explicá-la utilizando sinônimos. Além disso, um dos professores destaca a facilidade que os estudantes têm em reconhecer relações funcionais através do diagrama de Venn.

Quanto aos aspectos emocionais de aprendizagem matemática, aparece o conhecimento sobre um problema que se encontra dentro do contexto de interesse dos estudantes (sua nota em uma avaliação), contextualizando o problema a uma situação pessoal. Em relação às interações dos estudantes com o conteúdo, é identificado o conhecimento sobre as limitações do uso da analogia como uma máquina *dispenser* que, de acordo com Jaime, é útil apenas para iniciar o processo de ensino, uma vez que todos os estudantes já se depararam com a máquina. Entretanto, o professor afirma que depois de um tempo os estudantes não se lembrariam de tal analogia.

Por fim, identifica-se o conhecimento sobre o conceito de pares ordenados que serão uteis futuramente para estudar o plano cartesiano e o conhecimento prévio dos estudantes sobre equações e desigualdades para usá-los no cálculo da imagem e da pré-imagem de uma Função. Em uma das produções, aparece o conhecimento sobre uma habilidade que os estudantes deverão adquirir para reconhecer se determinadas relações correspondem a uma função e também o conhecimento sobre a importância dos conceitos de função para a compreensão de tópicos futuros. Tais conhecimentos correspondem ao subdomínio do Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS).

Como essas pesquisas contribuem para o conhecimento especializado de professores de Matemática?

As produções analisadas trazem importantes contribuições em relação à abordagem inicial dos conceitos de Funções a partir das tarefas exploratórias e analogias feitas pelos professores como forma de contextualização de aplicações que se aproximam do cotidiano dos estudantes, o que facilita a compreensão dos conceitos de variáveis dependente e independente e domínio, contradomínio e imagem. Tais situações auxiliam na compreensão das definições de Funções e também servem como ponte para relacionar diferentes registros de representação.

Em particular, uma das produções destaca um problema proposto (corrida de táxi) aos estudantes para que os mesmos possam resolvê-lo em grupo e, posteriormente, apresentarem suas respectivas soluções no quadro para a turma, possibilitando ao professor verificar os diferentes raciocínios matemáticos apresentados pelos alunos e, assim, avaliar os procedimentos e aproveitar dos erros e dificuldades encontradas para produzir conhecimento matemático através das discussões.

De um modo geral, os conhecimentos identificados nas pesquisas contemplam todos os subdomínios do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), mas não todas as categorias, evidenciando que para ensinar e fazer aprender Matemática, neste caso em específico, o tema de Funções, o professor deve mobilizar um conhecimento especializado, ou seja, ter domínio matemático e domínio didático (MCCORY *et al.*, 2012; ARAUJO, 2018).

Considerando que o MTSK pode ser uma ferramenta importante para a investigação analítica do conhecimento científico e especializado de professores (MORIEL JUNIOR; ALENCAR, 2020), as produções trazem uma maior compreensão sobre o conhecimento especializado de professores de Matemática para ensinar Funções na Educação Básica, podendo fazer o uso dos subdomínios e categorias deste identificados ou não para treinar professores em formação (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018) inicial e/ou continuada, o que pode vir a contribuir com a melhoria do ensino do referido tema.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho realizamos um mapeamento da produção científica relativa ao conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica entre o período de 2015 a 2020, identificando suas principais características, analisando os conhecimentos especializados que aparecem nas produções e sistematizando um conjunto de conhecimentos especializados para o ensino de Funções a partir dessas produções.

Os resultados nos mostram que as investigações ocorrem através de estudos de caso qualitativos, tendo como instrumentos as gravações de áudio e vídeo, entrevistas e teste de conhecimento matemático, tendo como sujeitos professores de Matemática que já possuem experiência no nível em que atuam, considerando que foi possível identificar as investigações apenas no nível de Ensino Médio e Ensino Médio Profissional. Em relação aos referenciais teóricos adotados pelos pesquisadores, destacam-se as opções por modelos teóricos de conhecimento que são específicos do professor de Matemática (MKT, MTSK e ETM), contribuindo para maiores discussão e compreensão acerca do conhecimento do professor de Matemática.

Identificamos nas produções conhecimentos especializados que contemplam todos os subdomínios do MTSK, mas não todas as categorias, contemplando o Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (Definições, propriedades e seus fundamentos; Fenomenologias e aplicações; Registros de representação; Procedimentos), Conhecimento da Estrutura Matemática (Conexões de simplificação; Conexões auxiliares), Conhecimento da Prática Matemática (Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar), Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (Potencialidades e dificuldades de aprendizagem; Aspectos emocionais de aprendizagem de matemática; Interação dos estudantes com o conteúdo), Conhecimento do Ensino da Matemática (Teorias de ensino; Recursos de ensino; Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos) e Conhecimento dos Padrões de aprendizagem de Matemática (Resultados esperados de aprendizagem; Sequenciação de tópicos). Dentre os conhecimentos identificados, houve a predominância do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (**KoT**) assim como acontece no ensino de outros conteúdos matemáticos, como, por exemplo, o ensino de divisão de frações.

Tais resultados trazem maior compreensão sobre as produções científicas sobre o conhecimento de professores de Matemática para o ensino de Funções na Educação Básica, identificando como essas pesquisas têm sido realizadas, quais os principais referenciais teóricos adotados e quais resultados alcançaram. Assim, pôde-se identificar que alguns aspectos ainda precisam ser explorados sobre a temática em questão, como, por exemplo, investigar o conhecimento especializado de professores de Matemática em formação inicial.

Estes resultados trazem elementos para discussão e maior compreensão do conhecimento especializado de professores de Matemática, em particular para o ensino de Funções, e podem interessar a professores em formação inicial e/ou continuada por servirem de reflexão para planejamentos e/ou para ministrar as suas aulas. Também a professores formadores que, a partir do conjunto de conhecimentos especializados identificados ou não, podem treinar futuros professores para o ensino do referido tema e a pesquisadores da área do ensino Matemática, para ampliar as discussões sobre a temática em questão. Em particular, o presente trabalho pode contribuir com sua estrutura metodológica como base para outras pesquisas bibliográficas.

Quanto às limitações deste trabalho, destacamos que a análise foi realizada apenas em uma base de dados e não aprofundou nas conexões entre da conexão entre os conhecimentos, algo que é tão ou mais importante do que somente identificar e unificá-los em categorias MTSK. Para a continuidade do estudo pretendemos suprir estas limitações.

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS

ARAUJO, W. R. D. **Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de *lesson study***. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

ARCAVI, A. Teaching and learning algebra: Past, present, and future. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 14, n. 1, p. 145–162, mar. 1995.

ARDENGHI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no brasil. 2008. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

BENEDITO, L. A. B.; BERNARDES, A. Ensino de funções e as metarregras do discurso: a definição atual de função a partir de algumas definições históricas. **Revista De História Da Educação Matemática**, 5(2), 2019. Disponível em: https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/272 Acesso em: 17 de fev. de 2022

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 9, Ed. Temática (junho), p. 07-20, 2014.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto/Portugal: Porto Editora, 1994.

CARRILLO, J. *et al*. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas. Huelva**. Universidad de Huelva Publicaciones, p. 72-93, 2014

CARRILLO-YAÑEZ, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2 set. 2018.

ESPINOZA-VÁSQUEZ, G. *et al.* Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a traves del concepto de función. Toward a relationship between MWS and MTSK through the function concept. *In*: MACÍAS, J. A. (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XX** (pp. 197-206). Málaga: SEIEM.

ESPINOZA-VÁSQUEZ, G.; ZAKARYAN, D.; CARRILLO YÁÑEZ, J. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 21, n. 3, p. 301–324, 30 nov. 2018.

ESPINOZA-VÁSQUEZ, G.; ZAKARYAN, D.; YAÑEZ, J. C. Use of analogies in teaching the concept of function: Relation between knowledge of topics and knowledge of mathematics teaching. p. 9, 2017.

FIORENTINI, D. *et al*. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, dez, 2002.

FLORES-MEDRANO, E. *et al.* El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 30, n. 54, p. 204–221, abr. 2016.

FONTE, B. R. Algumas concepções e dificuldades sobre o ensino-aprendizagem de Funções envolvendo os contextos algébrico e gráfico e a conexão entre os mesmos. **Temas e Contexto**, 2002. Disponível em: https://www.cp2.g12.br/ojs/index.php/temaseconexoes/article/view/211 Acesso em: 17 de fev. de 2022

GARCIA, V. A. C. Função: o professor conhece este conceito? **VIDYA**, v. 29, n. 2, p. 43-52, jul./dez., 2009

GUMIERO, B. S.; PAZUCH, V. Knowledge Quartet: dimensões, pesquisas e reflexões sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática. **Bolema**, Rio *Claro (SP), v. 34, n. 66, p. 268-293, abr. 2020.*

HATISARU, V.; ERBAS, A. K. Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 15, n. 4, p. 703–722, abr. 2017.

KOHLS-SANTOS, P.; MOROSINI, M. C. O revistar da metodologia do estado do conhecimento para além de uma revisão bibliográfica. **Revista panorâmica**, v. 33. p.123 - 145. MaioAgo. 2021.

LIMA, L. de. **A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

MCCRORY, R. *et al.* Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 43, n. 5, p. 584–615, nov. 2012.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. 2014. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, 2014.

MORIEL JUNIOR, J. G. Rede de Conhecimentos Especializados Ativados em Formação Docente para Responder a um Porquê Matemático sobre Divisão de Frações. 2021. **Acta Sci**, (Canoas), 23(1), 193-224, Mar./Apr. 2021

MORIEL JUNIOR, J. G.; ALENCAR, E. S. DE. Pesquisa e formação docente com MTSK em Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 4, 16 mar. 2020.

PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 19, n. 1, 26 abr. 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31496 Acesso em: 17 de fev. de 2022.

REZENDE, W. M. O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais. **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011.

RODRÍGUEZ-FLORES, A. *et al.* Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso. **Uniciencia**, v. 30, n. 1, 30 jan. 2016.

RODRÍGUEZ-FLORES, A. *et al.* El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. **Uniciencia**, v. 32, n. 1, p. 89, 30 jan. 2018.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 6, n.19, p.37-50, set./dez. 2006.

SANTOS DE SOUZA, J. S.; SOUZA, L. D. O. A definição de função: operacionalizar para articular e articular para compreender. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 125–148, 21 maio 2018.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017.

SOUZA, R. P. D. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. 2016. 99 f.Dissertação (Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual do Norte Fluminense, Fluminense), 2016.

SILVA, L. R. DA; OLIVEIRA, R. G. L. Ensino de funções voltadas as práticas do cotidiano por meio da contextualização. **Revista Acadêmica Educação e Cultura em Debate**. v 3, n. 2, ago./dez. 2017.

VILAÇA, M. L. C. Pesquisa e ensino. **Revista do Curso de Letras da UNIABEU Nilópolis**, v. I, n. 2, mai./ago. 2010.