INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATO GROSSO
UNIVERSIDADE DE CUIABÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM ENSINO

VICENTE PEDROSO DA SILVA FILHO

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR DIVISÃO DE FRAÇÕES: ATIVIDADES FORMATIVAS BASEADAS EM QUESTÕES DE PRÁTICA

CUIABÁ-MT
2019

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATO GROSSO
UNIVERSIDADE DE CUIABÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM ENSINO

VICENTE PEDROSO DA SILVA FILHO

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR DIVISÃO DE FRAÇÕES: ATIVIDADES FORMATIVAS BASEADAS EM QUESTÕES DE PRÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior
Linha: Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas Tecnologias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu - Mestrado Acadêmico em Ensino do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso - IFMT associado à Universidade de Cuiabá - UNIC, como parte do requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino, área de concentração: Ensino, Currículo e Saberes Docentes, linha de pesquisa Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas Tecnologias, sob a orientação do Prof. Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior.

Cuiabá-MT
2019

S586c Silva Filho, Vicente Pedroso

Conhecimento especializado para ensinar divisões de frações : atividades formativas baseadas em questões de práticas / Vicente Pedroso Silva Filho. – Cuiabá. – 2019
115 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso-IFMT associado à Universidade de Cuiabá - UNIC - Campus Cuiabá, 2019
Orientador: Professor Dr. Jeferson Gomes Moriel Júnior

Bibliografia

1. Conhecimento especializado de professores de matemática (MTSK). 2. Divisões de Frações. 3. Prática e ensino de Matemática. Í. Título. II. IFMT/UNIC

CDU 511.13+371.3

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E INOVAÇÃO
CAMPUS CUIABÁ – CEL. OCTAYDE JORGE DA SILVA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
Nível Mestrado

ATA DO EXAME DE DEFESA

Aos vinte e quatro dias do mês de julho do ano de dois mil e dezenove, às 09:00 horas, no Programa de Pós-Graduação em Ensino do Instituto Federal de Mato Grosso em Rede com a Universidade de Cuiabá, na Sala E211 da Pós-Graduação, *Campus* Cuiabá "Cel. Octayde Jorge da Silva", sob a presidência do Prof. Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior, CPF 218.247.408-08 como Orientador, e com a participação dos membros examinadores Prof. Dr. Geison Jader Mello, CPF 283.851.558-64 como Examinador Interno, o Prof. Leandro Carbo, CPF 839.506.561-20 como Examinador Interno Suplente, e a Profa. Dra. Gladys Denise Wielewski, CPF 502.478.161-91 como Examinadora Externa, o Prof. Dr. José Carrillo Yanez, Passaporte Espanhol PAE 035888 como Examinador Externo Suplente reuniram-se a banca para Defesa Pública de Mestrado de **Vicente Pedroso da Silva Filho** matrícula **2017180660077,** aluno do Curso de Mestrado Acadêmico em Ensino. A dissertação intitulada **"Conhecimento Especializado Para Ensinar Divisão de Frações: Potencial Formativo de Situações Baseadas na *Prática*"** foi apresentada e após a arguição da banca foi **aprovada.** Para constar, foi lavrada a presente ata que depois de lida e aprovada, vai assinada pelos membros da banca examinadora.

Prof. Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior – Presidente da Mesa e Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT

Geison Mello

Prof. Dr. Geison Jader Mello - Examinador Interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT

GWielewski

Profa. Dra. Gladys Denise Wielewski - Examinadora Externa
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT

Prof. Dr. José Carrilho Yanez - Examinador Externo (Suplente)
Universidade de Huelva – ESPANHA

Prof. Dr. Leandro Carbo - Examinador Interno (Suplente)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
IFMT
Campus Cuiabá
Cel. Octayde
J. da Silva

Cuiabá, 24 de Julho de 2019.

Deus, obrigado por esta conquista, nada faria sem você, a minha vida não teria nenhum sentido sem a sua presença, pois na sua ausência nada sou.

DEDICATÓRIA

Sem vocês nenhuma conquista valeria a pena**:**

Aos meus pais Brito (*in memorian*) e Terezinha (*in memorian*) que, com dignidade, me ensinaram a importância da família e o caminho da honestidade e da persistência.

A Mara, minha amada esposa pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, muito comuns para quem tenta trilhar novos caminhos.

Aos meus filhos: Camila e Lucas, vocês são a razão do meu viver, sempre acreditando em mim e que me presentearam com três netos Melissa, Helena e Salomão; Flávio (genro) e Jéssica (nora), vocês também fazem parte desta história.

A meus irmãos Didi, Valdebran e Luciano e a todos os seus familiares, em nome dos quais cumprimento toda a Família Padilha que sempre me incentivou.

A Manoel e Dazinha, por meio de quem agradeço a toda a família Chaves pelo apoio e pela consideração.

Ao PG IBBN Irmãos em Cristo, graças eu dou pela amizade e orações.

AGRADECIMENTOS

Muito tenho a agradecer:

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que desempenha papel fundamental na expansão e consolidação da pós-graduação *stricto sensu* (mestrado e doutorado), pelo imprescindível apoio a este projeto de pesquisa, tornando possível a produção desta dissertação.

À Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação (PROPES), que planeja as atividades e as políticas de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação Tecnológica integradas ao ensino e à extensão, por possibilitar e contribuir na construção desta dissertação.

Ao Professor Jeferson que me orientou, o meu reconhecimento, respeito e admiração pela oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Professor José Carrillo, por cada contribuição significativa neste trabalho.

Ao IFMT – Campus Cuiabá, gratidão pelos trinta e três anos de convívio e aprendizagem.

Aos Colegas do DAS, em nome de Elisandra, pelo apoio, amizade e incentivo.

Ao IFMT e à UNIC pelos excelentes profissionais e pela oferta de um curso de excelência.

Aos colegas do Mestrado: Marcela, Susel, entre outros, pelo convívio sempre edificante.

Quero agradecer também o apoio do Glauco, Daniel Fernando e da Lui Patatas que muito contribuíram com este trabalho e pela sua amizade a oportunidade de compartilhar minhas preocupações com vocês.

Stela, agradeço a amizade. Meu reconhecimento pela sua contribuição fundamental neste trabalho.

Há muitas outras pessoas que contribuíram para essa dissertação além do acadêmico, pessoas que, na minha vida, deixaram uma palavra de encorajamento, um sorriso inspirador e encorajador. Que Deus abençoe a todos.

RESUMO

SILVA FILHO, V. P. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações:** atividades formativas baseadas em questões de prática. 2019. 115 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino, Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Ensino, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

O tópico de divisão de frações representa um conteúdo desafiador para alunos e professores no ensino da Matemática. Buscando contribuir para a superação deste cenário, esta pesquisa visa identificar como as atividades formativas baseadas em questões de prática contribuem para a construção ou a mobilização de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte dos licenciandos em Matemática. Com base nos aspectos didáticos de uma formação e as dificuldades que poderiam surgir no percurso formativo, identificados na fundamentação teórica, elaborou-se o roteiro da oficina formativa. Paralelamente, a literatura especializada sobre aspectos do ensino e da aprendizagem da divisão de frações forneceu elemento teóricos para a condução das atividades da oficina formativa e para a análise das manifestações dos sujeitos. A principal base teórica adotada é o modelo teórico *Mathematics Teachers" Specialized Knowledge* (MTSK,). Na metodologia empregou-se a pesquisa qualitativa com enfoque descritivo, a análise MTSK e de conteúdo a partir de dados obtidos em um contexto formativo baseado na tríade *MTSK-oficina-situações de prática* realizada em ambiente natural dos licenciandos, a partir das quais foram extraídos episódios que permitiram identificar e descrever conhecimentos matemáticos e didáticos do conteúdo mobilizados pelos sujeitos. Os resultados obtidos expressam conhecimentos especializados mobilizados pelos licenciandos associados a alguns subdomínios MTSK e respectivas categorias que parecem embasar as atividades de planejamento e de sua futura prática docente. As principais conclusões do estudo sobre a contribuição de atividades formativas baseadas em questões de prática são: (i) a abordagem coletiva das questões de prática permitiu a interação dos licenciandos, o que potencializa a construção de conhecimento especializado; (ii) a condução da oficina formativa no ambiente natural dos licenciandos favoreceu seu engajamento e oportunizou a identificação de conhecimento associado a contextos reais; (iii) a oficina formativa estruturada com situações de prática e MTSK promoveu a aproximação entre a pesquisa e a prática; (iv) questões de prática quando utilizadas na formação de professores favoreceram a integração entre conhecimentos da área disciplinar e da área didática associado a um conteúdo matemático específico. Portanto, esta investigação sobre conhecimento de futuros professores não só diagnosticou, mas também apontou o potencial formativo para que licenciandos desenvolvam conhecimento especializado para ensinar Matemática, indicando que um ensino básico de melhor qualidade necessita que o licenciando tenha durante sua formação inicial oportunidades para construção de conhecimento especializado. Isto reforça que o exercício da docência é uma atividade profissional cujo exercício por pessoas leigas, que se intitulam capazes ou se consideram donas de notório saber, é inconcebível. Cabe aos professores de Matemática se unirem em prol da valorização profissional e da formação especializada, em oposição a critérios genéricos de entrada e permanência na profissão.

Palavras-chave: Conhecimento especializado de professores. MTSK. Divisão de Frações. Questões de prática. Oficina formativa.

ABSTRACT

SILVA FILHO, V. P. Specialized knowledge to teach division of fractions: training activities based on practice questions. 2019. 115 f. Master's Degree in Teaching, Stricto Sensu Post-graduation Program in Teaching, Federal Institute of Education, Science and Technology of Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

The topic of fraction division represents challenging content for students and teachers in mathematics education. Seeking to contribute to overcoming this scenario, this research aims to identify how the training activities based on practical issues contribute to the construction or mobilization of specialized knowledge to teach fraction division by mathematics graduates. Based on the didactic aspects of a formation and the difficulties that could arise in the formative course, identified in the theoretical foundation, the formative workshop script was elaborated. At the same time, the specialized literature on teaching and learning aspects of the division of fractions provided theoretical elements for conducting the workshop activities and for analyzing the manifestations of the subjects. The main theoretical basis adopted is the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) theoretical model. The methodology used the qualitative research with descriptive approach, the analysis MTSK and content from data obtained in a formative context based on the triad MTSK-workshop-practice situations conducted in the natural environment of the undergraduates, from which they were extracted. episodes that allowed identifying and describing mathematical and didactic knowledge of the content mobilized by the subjects. The obtained results express specialized knowledge mobilized by the undergraduates associated with some MTSK subdomains and respective categories that seem to support the planning activities and their future teaching practice. The main conclusions of the study on the contribution of training activities based on practice questions are: (i) the collective approach of practice questions allowed the interaction of the undergraduates, which enhances the construction of specialized knowledge; (ii) the conduction of the training workshop in the natural environment of the undergraduates favored their engagement and enabled the identification of knowledge associated with real contexts; (iii) the training workshop structured with practical situations and MTSK promoted the approximation between research and practice; (iv) questions of practice when used in teacher training favored the integration between knowledge of the subject area and the didactic area associated with a specific mathematical content. Therefore, this research on knowledge of future teachers not only diagnosed, but also pointed out the formative potential for undergraduates to develop specialized knowledge to teach mathematics, indicating that a better quality basic education needs that the undergraduate student has opportunities for building specialized knowledge. This reinforces that the exercise of teaching is a professional activity whose exercise by lay people, who call themselves capable or consider themselves to have notorious knowledge, is inconceivable. It is up to mathematics teachers to unite in favor of professional enhancement and specialized training, as opposed to generic criteria for entry and permanence in the profession.

Keywords: Specialized knowledge of teachers. MTSK. Division of Fractions. Practice questions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DAS PRINCIPAIS SIGLAS

DND	Algoritmo divisão de numeradores e denominadores entre si
FAPEMAT	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso
GIMC	Grupo Interdisciplinar de Investigação em Ensino de Matemática e Ciências da Natureza
IFMT	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
KFLM	Conhecimento de características da aprendizagem de matemática
KMLS	Conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática
KMT	Conhecimento do ensino de matemática
KoT	Conhecimento de tópicos matemáticos
KPM	Conhecimento da prática matemática
KSM	Conhecimento da estrutura da matemática
MK	Conhecimento de conteúdo matemático
MKT	*Mathematical Knowledge for Teaching* (Conhecimento Matemático para o Ensino)
MTSK	*Mathematics Teachers" Specialized Knowledge (*Conhecimento Especializado de Professores de Matemática)
PCK	Conhecimento didático do conteúdo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
REAMEC	Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SIDM	Seminário de Investigação em Educação Matemática - Universidade de Huelva
UNESP	Universidade Estadual Paulista/SP
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas/SP

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, são apresentados os elementos que não só justificam a escolha da temática envolvendo conhecimento especializado na formação docente acerca de divisão de frações, mas que também influenciaram o percurso adotado na presente investigação.

1.1 Tema da pesquisa

Este trabalho faz parte de um projeto coordenado pelo professor Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior intitulado "Conhecimento especializado para ensinar matemática" (aprovado no Edital da FAPEMAT 42/2016) e dá continuidade a projetos anteriores com fomento do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT, *Campus* Cuiabá particularmente aquele referente a atividades formativas para potencializar o conhecimento especializado para ensinar matemática (Edital IFMT 33/2016). Deste modo, por tratar de conhecimento especializado, utiliza-se como referencial teórico principal o modelo *Mathematics Teachers" Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2014) desenvolvido pelo grupo do Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIDM) da Universidade de Huelva que consiste em um modelo analítico para explorar o conhecimento de professores de Matemática. A presente investigação está inserida nos esforços do Grupo Interdisciplinar de Investigação em Ensino de Matemática e Ciências da Natureza – GIMC do IFMT e vinculada aos estudos desenvolvidos na *Red Iberoamericana MTSK*[1] coordenada pelo Dr. José Carrillo da Universidade de Huelva, Espanha – que conta com a participação da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC, da Universidade Estadual de Campinas/SP - UNICAMP e da Universidade Estadual Paulista/SP - UNESP no âmbito nacional.

Diversas pesquisas já foram realizadas com este modelo, até o presente momento, para caracterizar o conhecimento de licenciandos, professores e formadores de professores de Matemática para ensinar conteúdos de todos os níveis de ensino, da Educação Básica à Superior (AGUILAR, et al., 2013; CARRILLO et al., 2013; CARRILLO et al., 2014; MORIEL JUNIOR, 2014; ROJAS, 2014; MONTES, 2014; CONTRERAS; MONTES, 2015; VASCO, 2015; ESCUDERO-ÁVILA, 2015; AGUILAR, 2015; FLORES-MEDRANO, 2015).

Pesquisas que caracterizam o conhecimento de professores embasam a proposição de ações formativas e contribuem para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de

[1] http://redmtsk.com

Matemática, algo necessário no cenário nacional, pois os resultados apontam que tanto alunos como professores apresentam dificuldades em relação à Matemática (SAEB[2], 2018; INEP[3], 2018). Estes dados explicitam que 8 em cada 10 alunos concluintes do Ensino Fundamental não aprenderam a Matemática adequadamente, sendo que a maioria dos estudantes tem dificuldades em interpretar e resolver problemas de forma competente e em usar corretamente a linguagem matemática. Em suma, o conhecimento discente, a compreensão e a aplicação dos conteúdos de Matemática em todos os níveis de ensino estão bem abaixo do que se considera adequado nos parâmetros estabelecidos pelo Ministério da Educação (SAEB, 2018; INEP, 2018; PAIS, 2018).

Este desempenho também é similar no estado de Mato Grosso, pois no ano de 2015 apenas 3.927 alunos – matriculados no 9º ano – dentre 38.235, ou seja, apenas aproximadamente 10%, tiveram aprendizado adequado na competência de resolução de problemas de matemática (INEP, 2015). Merece destaque, ainda, o baixo desempenho dos alunos no tema frações, mais especificamente na divisão de frações, sendo que este é um conteúdo sobre o qual os professores também costumam apresentar dúvidas (BERTONI, 2008; LOPES, 2008; TYMINSKI; DOGBEY, 2012; SIEBERT, 2015; RIBEIRO; RÊGO, 2017). Assim, a escolha do tema de divisão de frações se justifica por ser um conteúdo em que estudantes apresentam baixo nível de compreensão e, no qual, muitas vezes, os professores também apresentam dificuldades e erros de aprendizagem semelhantes aos dos alunos (DAVIS; ESPOSITO, 1990; ASHLOCK, 2006; NEWTON, 2008; REDMOND, 2009; BAYOUD, 2011; TYMINSKI; DOGBEY, 2012; SIEBERT, 2015; RIBEIRO; RÊGO, 2017). Isto significa que os professores precisam estar melhor preparados para trabalhar esses conteúdos e as dificuldades dos alunos e que as licenciaturas têm um papel fundamental para melhorar este cenário. Além disso, "... há uma lacuna na literatura nacional em relação à exploração do conhecimento docente para ensinar divisão de frações" (MORIEL JUNIOR, 2014).

Diante deste cenário, torna-se imprescindível o desenvolvimento de ações não somente para identificar conhecimentos necessários ao professor de Matemática como também para o desenvolvimento destes conhecimentos (MORIEL JUNIOR; CARRILLO, 2014), traduzindo-os em atividades formativas que possam efetivamente impactar na atuação dos docentes durante o magistério. Neste sentido, um estudo mostra que é possível converter os resultados das pesquisas acerca de conhecimento docente sobre ensino e aprendizagem de divisão de frações

[2] SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica
[3] INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

em questões ou atividades específicas com finalidade não só diagnóstica (para compreender o estado do seu próprio conhecimento), mas também com potencial formativo para que professores e licenciandos desenvolvam conhecimento especializado para ensinar matemática (MORIEL JUNIOR et al., 2017). Este é o ponto de partida desta investigação, com foco na contribuição dos atuais avanços na área para a construção de conhecimentos especializados, na formação de professores de Matemática relacionados ao ensino de divisão de frações. Ela está em consonância com o trabalho do Grupo de pesquisa GIMC, coordenado pelo professor Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior, em que são realizadas investigações acerca dos conhecimentos especializados dos professores na área de ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas tecnologias (MORIEL JUNIOR, 2014; LUÍS, MONTEIRO, CARRILLO, 2015; LIMA, 2018, SOARES, 2019). Neste contexto, a temática é a mobilização ou desenvolvimento de conhecimento especializado para ensinar divisão de frações por meio de atividades formativas baseadas em questões de prática.

A temática deste trabalho consiste em investigar o conhecimento especializado para ensinar divisão de frações através das atividades formativas baseadas em questões de prática. Para investigar os estudos antecedentes e a fundamentação teórica, foram utilizadas as palavras chaves: conhecimento docente especializado de divisão de fração, questão de prática, situações de prática e formação docente. Essa pesquisa foi feita nos bancos de dados de teses da Capes, da Scielo, da revista do professor de matemática e do Google scholar, o que resultou em teses, dissertações, livros e artigos científicos sobre divisão de frações.

Dos trabalhos encontrados, metade tem como sujeitos de pesquisa licenciandos, professores e formadores do ensino de matemática e focaliza o conhecimento docente sobre divisão de frações permitindo compreender as principais contribuições que os pesquisadores deram para a temática até o momento, os modos como ela tem sido abordada e os pontos que ainda precisam ser explorados.

1.2 ESTUDOS ANTECEDENTES

Durante os últimos trinta anos, a discussão acerca de que conhecimento em educação matemática pode ser útil para um professor tem gerado a proposição de modelos que descrevem e se aproximam das diferentes naturezas desse conhecimento (CARRILLO et al., 2017).

Entre as várias tentativas de mapear o conhecimento profissional dos professores, talvez o mais influente seja o estudo de Shulman (1986), no qual ele identificou, além dos já consolidados à época, três novos domínios: Conhecimento do Conteúdo (SMK), Conhecimento

Curricular (CK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), sendo este último sua contribuição mais significativa (MORIEL; WIELEWSKI, 2017).

Desde sua publicação, outras alternativas para conceituar conhecimento dos professores foram propostas, cada uma apresentando distintos elementos e características, no sentido de descrever o conhecimento que um professor necessita para ensinar. São exemplos destas tipologias: *Mathematical Knowledge for Teaching* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), *Hexagon Model of Pedagogical Content Knowledge for Science Teaching* (PARK; OLIVER, 2007), *Quartet Knowledge* (ROWLAND et al., 2009) e *Mathematics Teachers" Specialized Knowledge* (CARRILLO et al., 2014).

Esforços subsequentes buscaram refinar a distinção de componentes ou subdomínios do conhecimento dos professores baseando-se em elementos como: as diferenças entre Matemática acadêmica e Matemática escolar (BROMME, 1994); as diferentes situações em que o conhecimento é colocado em jogo (ROWLAND et al., 2005); a complexidade de tal conhecimento e seu desenvolvimento (DAVIS; SIMMT, 2006); ou, ainda, a especificidade do conhecimento do professor em oposição a outros usuários ou profissionais de Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Nestes estudos, o conhecimento matemático é apontado como fundamental, porém não suficiente, para exercício da docência, pois

> [...] professores que não conhecem bem a sua disciplina, a sua matéria, não estão aptos a ter o conhecimento necessário para ajudar os estudantes a aprender determinado conteúdo. Ao mesmo tempo, entretanto, somente saber bem a matéria pode não ser o suficiente para ensinar. [...] E mais, professores precisam saber para que serve a matemática e, entre outras coisas, escolher caminhos poderosos de representação dos conteúdos matemáticos para que esses tenham sentido e sejam compreensíveis para os estudantes. [...] O que parece mais importante é saber e estar apto para usar a matemática necessária inserida no trabalho pedagógico da docência (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 404, tradução nossa).

Os objetivos destes modelos têm sido relacionados à discussão dos diferentes elementos do conhecimento que um professor precisa para desenvolver sua tarefa profissional em relação ao ensino de uma disciplina, focando de maneira especial na atividade de sala de aula (CARRILLO et al., 2017).

No desenvolvimento dos estudos – ao longo das últimas décadas – sobre os conhecimentos necessários aos professores para ensinar, é perceptível a tendência à especialização dos conhecimentos (MORIEL JUNIOR; WIELEWSKI, 2017). A pesquisa sobre conhecimento docente tornou-se muito produtiva na área da educação matemática e, recentemente, tem procurado investigar, descrever e explicar o que torna especializado o conhecimento do professor de Matemática (SCHNEIDER et al., 2017).

Neste contexto, surge o modelo teórico *Mathematics Teachers" Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2013; CARRILLO et al., 2014) que descreve qual é o conhecimento que pode ou deve ter um professor para ensinar e fazer aprender Matemática (MORIEL JUNIOR, 2014), desenvolvido com respaldo em outros modelos (SHULMAN, 1986; ROWLAND et al., 2009) e como uma resposta às dificuldades detectadas na utilização do modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) para caracterizar adequadamente o conhecimento do docente de Matemática.

Apesar da vasta literatura sobre modelos para descrever os conhecimentos necessários ao professor para ensinar Matemática, o conhecimento dos professores para ensinar divisão de frações (tema deste trabalho) é muito menos explorado na comunidade científica brasileira do que internacionalmente (MORIEL JUNIOR; WIELEWSKI; CARRILLO, 2019), pois foram identificados apenas três estudos nacionais (BARBOSA, 2011; SILVEIRA; SILVA, 2013; MORIEL JUNIOR, 2014) em um universo de mais de 60 trabalhos (BAYOUD, 2011; MA, 1999; BALL; THAMES; PHELPS, 2008 ; LI, 2008; NEWTON, 2008; REDMOND, 2009; RULE; HALLAGAN, 2006; BARBOSA, 2011; KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; TIROSH, 2000; CARRILLO et al., 2013). A seguir, apresentamos cronologicamente as principais contribuições dos estudos da área que nos antecederam.

Uma investigação acerca da compreensão da divisão com frações foi conduzida por Ball (1990) e relata uma análise feita com dados de entrevistas com 19 futuros professores. Três diferentes contextos matemáticos foram empregados para examinar conhecimento dos professores, sendo eles: divisão com frações, divisão por zero e divisão com equações algébricas. Em cada caso, os futuros professores de Matemática foram convidados a explicar ou gerar representações, assim foram identificadas as dificuldades, sendo a principal a interpretação dos problemas que envolviam divisão com frações .

A tarefa foi tão difícil para os futuros professores que muitos se sentiram desconfortáveis e vários comentaram que não gostavam de frações. Poucos sujeitos conseguiram dar explicações matemáticas com princípios e significados subjacentes, o que possibilitou ao autor confirmar o conhecimento fragmentado dos futuros professores, uma vez que cada caso de divisão foi realizado, pela maioria dos participantes, como uma parte separada de conhecimento. Portanto, os resultados para essa questão sugerem que, na maioria dos casos, o conhecimento dos futuros professores sobre divisão com frações consistia mais na memorização de uma regra específica do que na compreensão conceitual de outras ideias sobre divisão e divisão de frações.

Desta forma, pode-se afirmar que os resultados forneceram evidências de que mesmo respostas corretas com garantias matemáticas legítimas ou com entendimento não garantem que os professores tenham a preparação adequada do assunto para o ensinar Matemática de maneira a torná-la fácil de entender, pois, provavelmente, o que os futuros professores sabiam, aprenderam em suas aulas de Matemática anterior à formação inicial.

O que o estudo conclui é que a preparação de professores de Matemática deve ser muito bem pensada e realizada, o que implica na necessidade de fazer muito mais do que é feito atualmente. Assim, os professores devem ser ajudados a transformar e aumentar sua compreensão da Matemática, trabalhando com o conhecimento que já possuem de modo a auxiliá-los a desenvolver todos os tipos compreensão matemática necessários para que possam vir a ensinar bem Matemática.

TIROSH (2000) discutiu o desenvolvimento de conhecimentos sobre a divisão das frações e a conscientização dos professores por meio de um programa de formação, fornecendo uma descrição do conhecimento pedagógico do conteúdo e do conhecimento matemático de professores no tema divisão de frações. Buscou, por meio de um curso, desenvolver o conhecimento dos professores em relação à divisão de frações de modo a: (i) aumentar sua sensibilidade e consideração cuidadosa de possíveis respostas e ideias dos estudantes e (ii) familiarizá-los com as principais pesquisas sobre formas de pensar das crianças sobre a divisão de frações, em particular as fontes de equívocos. Dentre os principais resultados deste estudos destaca-se que melhorar o conhecimento dos futuros professores sobre o que as crianças sabem sobre frações antes da instrução não é menos importante do que promover seu conhecimento do que as crianças normalmente não sabem após a instrução (TIROSH, 2000).

Também se constatou que o fato de os futuros professores desconhecerem as respostas incorretas dos alunos e suas dificuldades algorítmicas ou de compreensão impacta de forma determinante nas reações às respostas incorretas encontrada nas aulas. Os dados indicam que, antes de os futuros professores entrarem no curso, a maioria menciona apenas erros baseados em algoritmos ou compreensão de leitura. No final da formação, no entanto, a maioria dos participantes estava familiarizada com várias fontes de respostas incorretas dos alunos e mostrava-se capaz de incorporar este conhecimento em seu planejamento de aula, adotando estratégias e recursos que auxiliassem os alunos a superar estas dificuldades cognitivas.

Desta forma, Tirosh (2000) sugere que os programas de formação de professores familiarizem os futuros professores aos erros comuns dos alunos, suas fontes, os processos cognitivos por vezes errôneos utilizados pelos estudantes na divisão de frações. Recomenda ainda que os educadores Matemáticos devem analisar o conhecimento dos futuros professores sobre respostas comuns dos estudantes da educação básica a determinadas tarefas.

Também com o intuito de encontrar uma conexão entre a confiança de um professor no assunto e sua prática instrucional, Coslett (2004) estuda o caso de três professores apontando a interação entre sua compreensão, confiança e prioridades da prática instrucional sobre divisão de frações durante um curso de graduação em Matemática projetado para futuros professores. O autor constata que existem diferenças entre as experiências e a aprendizagem de cada pessoa e mostra que existem importantes implicações dessas descobertas no que diz respeito aos métodos usados em reformas de ensino de Matemática.

Nesta pesquisa, cada participante concluiu o semestre com um alto nível de confiança, pois havia melhorado seus conhecimentos de divisão de frações ao longo do período. Foi observada uma conexão entre a confiança do professor e as prioridades que eles atribuíram a certas práticas instrucionais que, por sua vez, têm alguma correlação com a sua prática de instrução quando ensinam em sala de aula. As implicações deste estudo mostram que formadores de professores devem se concentrar em dar aos professores uma ampla exposição a diferentes métodos de ensino em suas aulas.

Outrossim, ensinar Matemática requer um conjunto especial de habilidades, portanto, torna-se necessário e importante para os formadores de professores pensar em que conhecimentos de matemática e pedagogia os professores precisariam construir. Diferentes abordagens são necessárias para melhorar a formação de professores observando a diversidade de necessidades em cada sistema e contexto.

Ainda no tocante à formação docente, Li e Kulm (2008) afirmam que, para tornar a preparação do professor e seu desenvolvimento profissional eficazes, é importante descobrir possíveis deficiências no seu conhecimento, bem como as próprias percepções dos professores sobre suas necessidades. Este estudo se concentrou no conhecimento dos professores com instrumentos de avaliação específicos sobre divisão de frações, conceituando a noção de conhecimento dos professores acerca de matemática e pedagogia e contendo, ainda, as percepções dos professores sobre sua preparação no que concerne aos conhecimentos matemáticos necessários para o ensino.

O referido trabalho esclareceu diferentes aspectos do conhecimento necessário para ensinar ideias matemáticas e habilidades para a compreensão da Matemática, sendo que os resultados revelaram um conhecimento limitado da Matemática para o ensino da divisão de frações assim como pouca confiança dos professores em seus próprios conhecimentos. Em suas considerações finais, os autores sugerem que estes professores precisam desenvolver uma compreensão sólida e profunda do conhecimento de Matemática para o ensino, a fim de construir sua confiança para a instrução em sala de aula, uma vez que a falta de preparação adequada em Matemática leva, muitas vezes, os professores a experimentarem dificuldades na instrução de sala de aula.

O estudo de Tyminski e Dogbey (2012) aborda a divisão de frações, considerando-a um tópico que é, muitas vezes, problemático tanto para estudantes de Ensino Médio, bem como para professores em formação. O objetivo do artigo foi trabalhar com todos os níveis de professores de Matemática e levá-los a entender que a Matemática faz sentido e que existem razões para os procedimentos e algoritmos que são usados.

O estudo apresenta ainda outra abordagem para desenvolver o algoritmo de denominador comum: problemas de divisão inseridos em um contexto. Estes problemas são usados extensivamente para formação elementar dos professores e os professores, por sua vez, têm usado em suas salas de aula com estudantes. O estudo compartilha alguns exemplos deste tipo de problema, tal como determinar o número de porções de $\frac{3}{4}$ de litro em 6 litros de sorvete.

Para ajudar os professores a descobrir e desenvolver o algoritmo do denominador comum, Tyminski e Dogbey (2012) colocaram uma série de problemas dentro do contexto da divisão de frações e convidaram os professores para escrever expressões numéricas com explicações que ligassem o contexto do problema e seu método de solução. Os professores, inicialmente, ficaram confusos ao perceberem que teriam que escrever frases numéricas para explicarem seu pensamento. O que os autores constataram foi que todos os grupos utilizaram uma estratégia semelhante para resolver as três primeiras tarefas na folha de atividades, ou seja, eles representaram o “todo” no problema e, em seguida, subdividiram-no em pedaços do tamanho que eles precisavam.

Os estudos antecedentes elencados sobre o conhecimento de professores a respeito do tema divisão de frações indicam que o conhecimento prévio dos erros comuns dos alunos, assim como o processo cognitivo associado a estes, é relevante para o ensino do tema (TIROSH, 2000). Também foi constatada a importância do professor compreender e estar apto a transmitir que a Matemática faz sentido e que existem razões para os procedimentos e algoritmos envolvidos na divisão de frações (TYMINSKI; DOGBEY, 2012).

Percebe-se que a preparação de professores deve ser muito bem pensada e realizada (BALL, 1990), pois estes precisam desenvolver uma compreensão sólida e profunda da Matemática a fim de estabelecerem sua confiança (LI; KULM, 2008). Este processo deve ser amparado pela apresentação de diferentes abordagens em sua formação, de modo que se sintam aptos a exercer a docência em diferentes contextos (COSLETT, 2004). Com base neste cenário, entendemos que focalizar o conhecimento especializado a partir do MTSK em um contexto formativo por meio de uma oficina formativa com discussão de questões de prática pode trazer contribuições significativas para o desenvolvimento da temática e é, portanto, o fio condutor deste trabalho, cujo problema de pesquisa apresenta-se a seguir.

1.3 PROBLEMA DE PESQUISA

Diante da importância da construção de conhecimento especializado para ensinar Matemática e da lacuna identificada na literatura no referido campo de pesquisa sobre a exploração do conhecimento docente para ensinar divisão de frações, propõe-se esta investigação para responder a seguinte pergunta: Como as atividades formativas baseadas em questões de práticas contribuem para a construção ou mobilização de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte de licenciandos em Matemática?

1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral da pesquisa é analisar a potencialidade de atividades formativas baseadas em questões de prática no que diz respeito à construção ou mobilização de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte de licenciandos em Matemática. Para atingir o objetivo geral, estabelecemos os seguintes objetivos:

- Identificar os conhecimentos especializados do domínio matemático mobilizados ou construídos por licenciandos a partir da discussão de atividades baseadas em questões de prática de divisão de frações elaboradas com base no MTSK;
- Identificar os conhecimentos especializados do domínio didático do conteúdo mobilizados ou construídos por licenciandos a partir da discussão de atividades baseadas em questões de prática de divisão de frações elaboradas com base no MTSK.

1.5 BREVE DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho é composto por cinco capítulos, além de referências e anexos.

No primeiro capítulo, explica-se a motivação e contextualização do estudo e como este trabalho está estruturado. Além disso, faz-se a apresentação dos elementos que justificam a escolha do tema, do conhecimento especializado na formação docente e da divisão de frações. Elenca-se, ainda, os estudos antecedentes que influenciaram o percurso adotado na presente investigação, assim como os objetivos desta dissertação e os sujeitos que fizeram parte desta investigação.

No segundo capítulo, se apresentam as bases teóricas que fundamentaram esta pesquisa para responder à questão que sintetiza o problema de pesquisa, que é: como as Atividades Formativas baseadas em Questões de Práticas contribuem para a construção ou mobilização de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte dos licenciandos em Matemática? Assim, se discorre acerca de teorias como: referências sobre a formação de professores; aspectos do ensino e aprendizagem de frações; aspectos do ensino e aprendizagem de divisão de frações; e, ainda, Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – MTSK.

No terceiro capítulo, é apresentado o Encaminhamento Metodológico com a descrição do caminho seguido na pesquisa para alcançar os objetivos propostos; da opção metodológica adotada; da natureza da pesquisa: tipo, paradigma epistemológico, bem como o contexto e os sujeitos da pesquisa (acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, de uma Instituição Pública de Ensino). Fala-se, ainda, sobre os instrumentos de coleta das informações e da análise dos dados e se apresenta uma síntese da metodologia, em que foram realizadas duas fases de investigação para obtenção e análise dos dados. Além disso, faz-se a justificativa das escolhas realizadas e descreve-se o caminho seguido na pesquisa para alcançar os objetivos propostos.

Os resultados constam no Capítulo 4, no qual se descreve o processo de análise realizado nas cinco situações de práticas discutidas nas oficinas formativas e os instrumentos de coleta de dados. Nas seções do capítulo, são descritas as ferramentas usadas para analisar o conhecimento mobilizado pelos licenciandos referente ao tema divisão de frações. Essas ferramentas emergem dos dados e das referências teóricas apresentadas no Capítulo 2.

Por sua vez, as considerações finais constam no Capítulo 5, em que se destacam as principais conclusões do trabalho realizado e aspectos relevantes tais como as análises de cinco episódios, além da sua relevância para a formação inicial através da oficina formativa. Aborda-se também o conhecimento especializado como forma de valorização profissional do professor de Matemática e aponta-se possibilidades e perspectivas de pesquisas futuras e ações utilizando o Modelo Teórico MTSK, sem que se deixe de mostrar as suas limitações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os referenciais deste capítulo permitiram a realização deste estudo, desde a definição dos objetivos até a análise dos dados e a discussão dos resultados.

A base teórica sobre a formação de professores, primeira parte deste capítulo, permitiu a construção do roteiro da oficina formativa que levou em conta os aspectos didáticos de uma formação e as dificuldades que poderiam surgir no percurso considerando-se o conhecimento docente especializado para ensinar divisão de frações.

Os estudos apontados na literatura especializada sobre aspectos do ensino e da aprendizagem de frações e de divisão de frações – segunda e terceira parte deste capítulo – forneceram elementos teóricos para o pesquisador trabalhar com as questões de prática durante a oficina e analisar as manifestações dos sujeitos.

Na quarta parte do capítulo, discorre-se sobre o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – MTSK, que descreve os conhecimentos para ensinar Matemática que um professor deve ter, além de proporcionar uma análise refinada destes por meio de suas categorias, que destacam aspectos específicos deste conhecimento.

Apresentam-se, neste capítulo, alguns aspectos teóricos presentes na literatura sobre formação de professores (GOUTARD, 1964; D‟AMBROSIO, 1993; BRASIL, 1997; NÓVOA, 2002; JARAMILLO, 2003; GARCIA, 2003; MOREIRA, 2004; FIORENTINI, 2005; SILVA, 2005; MOREIRA e DAVID, 2007; LOPES, 2008; GATTI, 2010; BORBA, 2017) que possibilitaram a aquisição de conhecimento didático-pedagógico para embasar a estruturação e o desenvolvimento da oficina formativa na discussão de cinco questões baseadas em situações de práticas ligadas ao ensino de divisão de frações com sujeitos da pesquisa.

Serão expostos, também, aspectos teóricos do ensino e aprendizagem de frações (SANTOS, 1996; BRASIL, 1997; ARIAS; MAZA, 1997, CISCAR e GARCIA, 1998; MA, 1999; WU, 1999; KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; CAMPOS; VASCONCELOS; RODRIGUES, 2007; MOREIRA; FERREIRA, 2008; BERTONI, 2008; LOPES, 2008; SILVA; ALMOULD, 2008; MAGINA et al., 2009; BARBOSA, 2011; BAYOUD, 2011; VERNEQUE, 2011; CONTRERAS, 2012; FLORES, 2013; MORIEL JUNIOR, 2014; ARNON et al., 2014; RIPOLL et al., 2016; RAFAEL, 2016) que nortearam a escolha dos tópicos matemáticos abordados na formação realizada.

Já no que concerne aos aspectos do ensino e aprendizagem de divisão de frações (BALL, 1990; BRASIL, 1998; MA, 1999; TIROSH, 2000; NILLAS, 2003; CONTRERAS, 2004; ASHLOCK, 2006; LOPES, 2008; NEWTON, 2008; LI, 2008; REDMOND, 2009; BAYOUD,

2011; GARCÍA, 2013; ÖZEL 2013; MORIEL JUNIOR, 2014; KARP; BUSH; DOUGHERTY, 2015; RAFAEL, 2016; MORIEL JUNIOR, 2017; SILVA, 2019), os mesmos serviram de fundamento para os aspectos didáticos da oficina formativa.

Também são abordados os fundamentos teóricos acerca do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – MTSK (SHULMAN, 1986; PONTE, 1994; VALE, 2002; ROWLAND et al., 2005; BALL et al., 2008; FLORES, 2008; KUZNIAK, 2011; MONTES, CARRILLO et al., 2013; AGUILAR, 2015; AGUILAR, et al., 2013; FLORES; ESCUDERRO; AGUILAR, 2013; MONTES et al., 2013; CARRILLO et al., 2014; FLORES-MEDRANO et al., 2014; ROJAS, 2014; FLORES-MEDRANO, 2015; VASCO, 2015; MONTES; CLIMENT, 2016; MORIEL JUNIOR; WIELESWKI, 2017; ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016; CARRILLO et al., 2017; CARRILLO et al., 2018) que é específico de professores de Matemática, sendo considerado também uma ferramenta metodológica para exploração analítica deste conhecimento. Tem-se, assim, os quatro eixos que subsidiaram esta investigação.

2.1 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nesta seção aborda-se a formação de professores, especificamente a formação inicial e a formação contínua, esses referenciais foram essenciais neste estudo. pois forneceram as bases teóricas e nortearam a elaboração da oficina formativa, incluindo o roteiro da mesma e a seleção das questões de prática.

A formação docente abrange a formação inicial e a formação continuada, pois estas configuram-se como elementos de grande importância para o desenvolvimento e o desempenho profissional do docente. Portanto, quando se discute a formação do professor de Matemática – que é considerada um desafio para os educadores devido a sua complexidade – não se pode almejar um ensino de qualidade sem tratar de modo adequado essa formação.

Inicialmente abordar-se-á a formação inicial, a qual D‟AMBROSIO (1993) afirma que um programa de formação tradicional dificilmente preparará um professor para lidar com os desafios das propostas curriculares modernas. O autor afirma, ainda, que as pesquisas sobre a ação de professores mostram que, em geral, o professor ensina da maneira como lhe foi ensinado.

Os professores do século XXI ainda trazem consigo concepções antigas transmitidas através das gerações, pois, de acordo com ele, o ensinar como aprendi é uma prática pedagógica comum que, atualmente, tornou mais difícil ensinar, devido ao fato dos alunos de hoje em dia possuírem muitos estímulos como *smartphones, internet* e redes sociais, que são muito mais atraentes do que as aulas do século XIX que ainda são ministradas (LOPES, 2008).

> Por isso, para ser professor de Matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente. Sobretudo, necessita conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático (FIORENTINI, 2005, p. 110).

Ao examinar o processo de formação no curso de licenciatura em Matemática, Moreira (2004) ressalta as relações entre os conhecimentos matemáticos, o processo e as questões da prática docente escolar e, ainda, cita que o professor precisa saber mais do que aquilo que ensina.

É preciso que o futuro professor faça uma reflexão profunda sobre o cotidiano escolar, o ensino e a aprendizagem da Matemática, aproximando-se assim da complexidade da prática pedagógica envolvida em sua futura profissão (JARAMILLO, 2003).

A preocupação com a formação de professores na formação inicial e contínua, segundo Gatti (2010), está presente em diversos países, tanto pela necessidade de atualização que o mundo de trabalho atual impõe, quanto pela constatação de precários desempenhos por parte de muitos estudantes. Devido a esses problemas, os professores precisam continuamente adaptar-se a novas realidades – tal como a informatização crescente das sociedades – e preparar-se para ensinar, cada vez melhor, as novas gerações para a cidadania plena.

Na formação inicial, o futuro professor deve desenvolver conhecimentos de conteúdos e conhecimentos pedagógicos que o habilitem a exercer a docência em toda a sua complexidade, contudo, o tempo não é suficiente para preparar plenamente nenhum profissional. Em alguns cursos, a formação referente a conteúdos é desarticulada da formação pedagógica, o que faz com que a formação continuada seja indispensável para o constante desenvolvimento do professor (MOREIRA; DAVID, 2007).

A formação continuada, por sua vez, apresenta-se como atividade fundamental e complementar à formação inicial dos professores, uma vez que pode ser responsável pela articulação entre o conhecimento científico da Matemática e o aspecto didático (MOREIRA; DAVID, 2007).

Esses futuros professores precisam de uma atenção especial na sua formação inicial, uma vez que a formação inicial, muitas vezes, não dá conta do preparo de um profissional adequado e a formação continuada se faz necessária (NÓVOA, 2002).

Dentre os obstáculos que o Brasil enfrenta em relação ao ensino de Matemática, destaca-se a falta de formação profissional qualificada para os docentes (BRASIL, 1997). Portanto, deve-se ter como primordial que o licenciando tenha uma formação voltada para as necessidades reais de sua profissão.

É importante a articulação entre teoria (própria da graduação) e prática escolar, pois ajuda a "fortalecer nexos entre a profissão docente e a formação inicial de professores de matemática" (MORIEL JUNIOR; CYRINO, 2009, p. 535).

2.2 ASPECTOS DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

O conhecimento do conceito de divisão e a compreensão do Método da Chave[4] é essencial para o entendimento da divisão de frações, da mesma forma há necessidade de se fazer um estudo referente ao ensino e aprendizagem de frações e de seus diversos significados.

Define-se matematicamente fração como a relação entre partes selecionadas e o total de partes em que um inteiro (a unidade) foi dividido (SANTOS, 1996).

As frações têm sido um dos temas mais difíceis no Ensino Fundamental, por possuírem um conceito complexo e desafiador para alunos (MA, 1999; CAMPOS; RODRIGUES, 2007). Avaliações e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto, além do que, as propostas de ensino que buscam modificar esses resultados são apenas incipientes (BERTONI, 2008).

Um número significativo de professores e autores de materiais didáticos desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva (LOPES, 2008).

Geralmente, os assuntos sobre fração são apresentados de forma pronta e acabada, as aulas são um verdadeiro treinamento de habilidades, especialmente de cálculo, o que é considerado, por muitos, como o que de fato os alunos precisam saber.

A memorização de procedimentos e o conceito da divisão confundido com o algoritmo contribui para que a divisão de frações perca seu significado (RAFAEL, 2016). Esta fixação pelo adestramento, conforme Lopes (2008), empobrece as aulas de Matemática, além detomar

[4] O Método da chave é muito utilizado para realizar a divisão de dois números quaisquer, conforme esquema
$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & Q \end{array}$$
, onde temos que D = Q x d + r (SILVA, 2019)

o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da Matemática.

A memorização não é uma regra suficiente para resolver a operação divisão de frações, pois é necessário aprender seu significado e compreendê-lo, o que permite que os alunos se insiram nos contextos e situações que exigem isso e não se limitem ao simples conhecimento técnico de um algoritmo (GARCÍA, 2013).

Apesar das diversas pesquisas apontarem há algumas décadas para complexidade do tema, Lopes (2008) faz um alerta de que o ensino de frações é trabalhado de forma restrita e exclusivamente nas séries iniciais, até o sexto ano do Ensino Fundamental e que esse é um dos problemas que se detecta no ensino de frações. Além do que, parece estar implícito neste tipo de organização curricular, uma "reserva de mercado", característica dos currículos anteriores aos PCN, em que frações são tratadas nas 4ª e 5ª séries; razões e proporções na 6ª; álgebra na 7ª; e funções na 8ª.

No entanto, sabe-se que a aprendizagem de frações é um processo longo e complexo, que não se restringe a um ou dois anos escolares, mas sim se dá ao longo de todo o Ensino Fundamental (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; LOPES, 2008), sendo que as dificuldades e erros na aprendizagem dos números fracionários e suas operações são apontadas na literatura e em avaliações nacionais (BAYOUD, 2011; BERTONI, 2008).

Um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções", cálculo pelo cálculo, assim Lopes (2008) define como o ensino de frações tem sido praticado, ou seja, como se os alunos vivessem no final do século XI.

Em linhas gerais, o ensino de frações tem se caracterizado por uma ênfase no simbolismo e na linguagem matemática, na aplicação mecânica de algoritmos (sobretudo na aritmética de frações) e no uso de representações diagramáticas (MAGINA et al., 2009).

> Após a construção do conceito de fração e formulado os algoritmos das operações, as representações diagramáticas de fração como parte de uma unidade são descartadas, dando lugar aos procedimentos operatórios, que a partir daí, são adotados, geralmente, de forma exclusiva. A sequência didática parece iniciar-se por explicações acerca das relações entre uma quantidade representada por diagramas ou desenhos, e passa, em seguida, a adotar, quase que exclusivamente, a representação simbólica formal associada a situações que requerem resoluções algorítmicas. (MAGINA et al., 2009, p.414).

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal (BRASIL, 1997).

> As frações não são algo que se tenha que saber, mas sim algo que se tem que compreender, e não é possível compreendê-las antes de ter uma suficiente experiência com elas. [...] A chave do êxito na iniciação ao estudo das frações é a variedade, a troca, a diversidade de pontos de vista. (GOUTARD, 1964, apud GARCIA, 2003, p. 18, tradução nossa).

O fraco desenvolvimento conceitual no ensino de frações é apontado por Wu (1999) que descreve quatro problemas inter-relacionados, tanto na teoria como na prática:

1. O conceito de fração nunca é definido claramente e suas diferenças com os números inteiros não é enfatizada suficientemente;
2. As complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico;
3. As regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade;
4. Em geral, explicações matemáticas essenciais de quase todos os aspectos do conceito de fração não são dadas.

No estudo das frações, é importante salientar cinco significados principais do conceito – parte-todo, frações equivalentes, fração como número, fração como operador multiplicativo e fração como quociente – descritos a seguir.

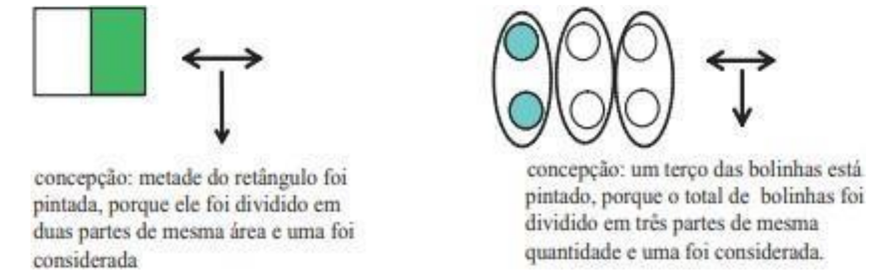
A *concepção de fração como parte-todo*, caracteriza-se por um inteiro (grandeza discreta ou contínua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário e, com este intuito, as figuras se prestam como representação desse inteiro. Convenciona-se então que ele deva estar dividido em partes "iguais" (mesma área) para que a parte em questão possa ser quantificada. O procedimento mais comum é a apresentação de uma figura plana dividida em partes congruentes com algumas selecionadas (VASCONCELOS, 2007; SILVA e ALMOULD, 2008). Esta representação com o uso do

> [...] modelo parte-todo auxilia, convenientemente, na produção da linguagem fracionária, quando os textos de matemática escolares e o discurso do professor tendem a orientar o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar as partes que serão consideradas (numerador) (SILVA e ALMOULD, 2008, p. 57).

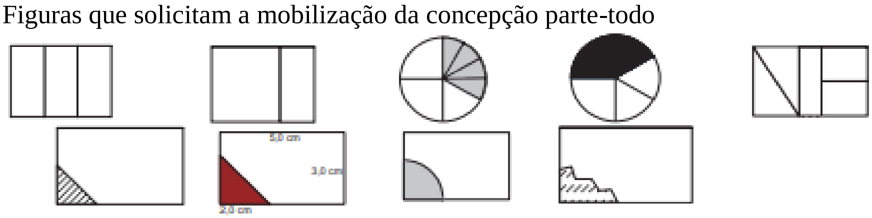
Para Ciscar e Garcia (1998), a ideia de fração se apoia em situações em que está implícita a relação parte-todo e esta relação é uma das possíveis interpretações da fração. Os autores afirmam, ainda, que também se pode representar uma fração em situações em que está implícita uma relação parte-parte (ou todo-todo), que leva à interpretação da fração como razão, conforme as figuras do quadro 1.

Quadro 1 – Representações da concepção parte-todo

Representação geométrica e simbólica da concepção parte-todo no contínuo e no discreto



Figuras que solicitam a mobilização da concepção parte-todo



Fonte: Silva, (2005, p. 108-109)

O ensino tradicional do conceito de *frações equivalentes* nos anos iniciais de escolarização tem indicado que o desempenho não alcança níveis adequados, sugerindo a importância de desenvolvimento de metodologias alternativas. Dentre os conceitos matemáticos em que as crianças apresentam maior dificuldade de aprendizagem, estão os conceitos de fração e de fração equivalente (VERNEQUE, 2011)

Frações equivalentes são frações com apresentações diferentes e que indicam quantidades ou proporções idênticas, (RIPOLL et al., 2016 e VERNEQUE, 2011), como podemos representar na Figura 1 – Representação gráfica de uma fração equivalente, em que podemos afirmar que as frações $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{2}{4}$ são equivalentes.

Figura 1 – Representação gráfica de uma fração equivalente

1 inteiro			
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$		$\frac{2}{4}$	

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

A apresentação da *fração como número* é um dos possíveis significados de seu conceito. Assim, as frações, como os números inteiros, são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de representação fracionária (representação na reta numérica das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$), a ordinária e a decimal (representação da fração $\frac{1}{2}$ na forma decimal). Ao atribuir à fração o significado de número, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para remeter a essa ideia (SILVA, 2005)

Associamos ao *operador multiplicativo* o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que deve imprimir sobre um número ou uma quantidade um significado, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um operador Multiplicativo significa admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas ou discretas. Nessa perspectiva, assim como o número inteiro, a fração poderá ser vista como escalar aplicada a uma quantidade (SILVA, 2005).

O significado de *fração como quociente* está presente nas situações em que a divisão surge como uma estratégia bem preparada para resolver um determinado problema. Isto significa que, conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo. Pressupõe, ainda, extrapolar as ideias presentes no significado parte-todo, pois nas situações de quociente temos duas variáveis que podem ser discretas ou contínuas (SILVA, 2005).

2.3 ASPECTOS DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DE DIVISÃO DE FRAÇÕES

O ensino e a aprendizagem de divisão de frações apresentam desafios específicos. Nesta seção apresentamos estas peculiaridades com foco nos alunos – seu processo de aprendizagem e erros comuns – e nos professores, abordando as dificuldades identificadas em pesquisas sobre o tema. Também são apresentadas as possíveis abordagens para ensino da divisão de frações segundo a literatura especializada.

O ensino da divisão de frações não apresenta muitas possibilidades de abordagem intuitiva (LOPES, 2008), pois o tópico tem escassas aplicações realistas (RAFAEL, 2016). Apesar destas dificuldades sabe-se que o resultado de uma divisão de frações, sem significado na sua interpretação se torna sem sentido, seja qual for o método de resolução utilizado (ÖZEL, 2013).

Assim, nas operações tanto de divisão como de multiplicação de frações, caso o professor se limite a apenas ensinar os procedimentos simbólicos mediante algoritmos convencionais, promovendo a automatização dos algoritmos para efetuar as operações, o aprendizado dos estudantes será comprometido (ROJAS et al., 2015).

Os problemas que os alunos melhor identificam com uma divisão de frações são aqueles que têm a estrutura de um único espaço de medição e correspondem ao modelo semântico de medição. Os alunos percebem problemas multiplicativos de divisão de frações de forma diferente de sua percepção dos problemas de divisão de números naturais, sendo a compreensão de divisão de números racionais de difícil compreensão para a maioria dos alunos (CONTRERAS, 2004).

Assim a aprendizagem da divisão de frações é uma preocupação para os pesquisadores da educação matemática (CONTRERAS, 2004). Para melhor compreender as dificuldades cognitivas dos alunos, a identificação de seus erros comuns foi foco de distintas investigações que visam subsidiar ações formativas que favoreçam a adoção de abordagens de ensino que auxiliem o processo de aprendizagem. Citamos algumas a seguir:

1. Manter denominadores quando são iguais é um erro comum $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$ (NEWTON, 2008);
2. Cancelar ou dividir em cruz como em $\frac{2}{9} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ ou $\frac{8}{9} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ (NEWTON, 2008);
3. Inverter o dividendo ao invés do divisor $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$ (ASHLOCK, 2006; BAYOUD, 2011; REDMOND, 2009).

Apresentamos a seguir uma divisão de frações que não apresenta erro, embora pareça, trata-se do algoritmo dividir numeradores e denominadores entre si (DND), como exemplo de sua aplicação tem-se $\frac{22}{21} \div \frac{2}{7} = \frac{22 \div 2}{21 \div 7}$ (TIROSH, 2000), a demonstração da validade do algoritmo DND é dada por $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 76). Percebe-se que o algoritmo DND é válido para quaisquer duas frações, que não envolvam, obviamente, a divisão por zero (MORIEL JUNIOR, 2014). No entanto, é comum professores e licenciandos desconhecerem o algoritmo DND e o classificarem como um procedimento incorreto. Esta dúvida conceitual pode impactar nas explicações instrucionais do docente e estender-se, também, sobre os modos de proceder em matemática (GARCÍA, 2013; LI; KULM, 2008; ÖZEL, 2013; TIROSH, 2000).

Apesar dos erros comuns acima apresentados já serem documentados na literatura especializada, os professores desconhecem as principais fontes de respostas incorretas dos alunos (TIROSH, 2000). Há por parte dos professores uma concentração excessiva na manipulação das operações aritméticas e na memorização de um conjunto de regras e procedimentos durante o processo de ensino de divisão de frações (ÖZEL, 2013).

A preferência dos docentes pela abordagem procedimental pode ser motivada pelo fato destes, apesar de deterem o conhecimento de conteúdo necessário para resolver os problemas, não possuem o conhecimento pedagógico do conteúdo para ensinar divisão de frações (ÖZEL, 2013), ou seja, embora os professores sejam capazes de realizar com sucesso as operações usando o algoritmo inverter e multiplicar, eles não estão aptos a explicar como e por que esta operação funciona (MA, 1999).

Frente a esta lacuna em seu conhecimento profissional, os professores adotam a prescrição de regras e macetes para realizar operações. Lopes (2008) exemplifica esta prática citando duas maneiras comuns de ensinar a divisão de frações de forma decorativa: (i) Para dividir uma fração por uma fração, multiplica-se a fração dividendo pela fração divisor invertida; (ii) Para dividir um número racional por outro número racional diferente de zero, basta multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo.

Assim, percebe-se que as dificuldades que os professores têm em ajudar os alunos a fazer conexões entre o mundo real e a divisão de frações é, muitas vezes, um reflexo de sua própria dificuldade conceitual.

Esta limitação na formação docente reflete-se também em falta de capacidade de escrever problemas com palavras que descrevam com precisão uma situação de divisão de frações do mundo real, cujas tentativas de resolução necessitariam que os alunos fossem capazes de resolver, comunicar, trabalhar de forma colaborativa em equipes e pudessem pensar criativamente (REDMOND, 2009).

Há abordagens para ensinar divisão de frações sem que a regra seja colocada como condição inicial e que o estudante seja envolvido em atividades que lhe conduzam primeiro a uma compreensão conceitual e, posteriormente, o levem a deduzir a regra (MORIEL JUNIOR, 2014). As dificuldades elencadas sugerem a adoção de estratégias de ensino que não se limitem ao algoritmo inverter e multiplicar (NEWTON; SANDS, 2012).

Para resolver uma divisão de frações pode-se, por exemplo, utilizar a regra de três, pois pode-se chegar à resolução de situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três (BRASIL 1998). Além disso, a regra de três:

> [...] propicia estabelecer ligações entre a Matemática e os conteúdos de outras áreas e com os Temas Transversais, à medida que o aluno os perceba como instrumentos essenciais para a constituição de uma atitude crítica diante de questões sociais, políticas, culturais, científicas da atualidade. (BRASIL, 1998, p.70),

Percebe-se, frente à complexidade do tópico, a importância de fornecer ao professor durante sua formação os elementos necessários para ensinar divisão de frações de forma mais conceitual (LOPES, 2008), pois além das dificuldades de compreensão dos conceitos envolvidos, os alunos também não reconhecem facilmente os problemas em cujas resoluções a divisão de frações pode ser adotada, pois este reconhecimento depende da estrutura do problema e das formas textuais usadas (CONTRERAS, 2004).

Frente a estes desafios, Tirosh (2000) propõe programas de formação de professores, nos quais estes se familiarizem com os processos de aprendizagem dos alunos, incluindo seus erros comuns. Percebe-se que o ensino de divisão de frações requer conhecimento especializado por parte dos professores, pois deve abranger além de conhecimento do conteúdo, conhecimento didático deste conteúdo. Algumas das possíveis e distintas abordagens para o ensino de divisões de frações são apontadas a seguir.

2.3.1 ALGORITMOS DA DIVISÃO DE FRAÇÕES

Um professor de Matemática que ensina divisão de frações tem que lidar com esses conceitos de algoritmos de modo a facilitar que seus alunos aprendam de maneira significativa e funcional (FLORES, 2013).

Tem-se na literatura especializada o algoritmo de divisão de frações, Inverso Multiplicativo : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b\ c} = \frac{a.d}{b.c}$ (MORIEL JUNIOR, 2014; NILLAS, 2003; CONTRERAS, 2012; LI, 2008; LOPES, 2008; ÖZEL, 2013; TIROSH, 2000).

Apresentamos seis algoritmos da divisão de frações identificados como mais relevantes CONTRERAS (2012):

1. Redução de frações ao denominador comum e divisão de numeradores $\frac{2}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{8}{12} \div \frac{9}{12} = \frac{8}{9}$
2. Produtos Cruzados, consiste em multiplicar em cruz da seguinte forma

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \quad \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a \times d}}{\mathbf{b \times c}}$$

3. Inversão de Multiplicação, este algoritmo consiste em multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor, então $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
4. Uso da unidade fracionária, consiste em procurar a fração unitária quando a fração é conhecida correspondendo a uma fração não unitária. Para dividir as duas frações, multiplica a fração dividendo pela recíproca da fração divisor, $\frac{21}{20} \times \frac{4}{7} = \frac{84}{140} = \frac{42}{70} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. Assim, $\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$
5. Conversão das frações em decimais, este algoritmo consiste em transformar as frações em decimais e realizar a operação, expressando depois o resultado em forma de frações, conforme o exemplo $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 0{,}5 \div 0{,}75 = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$
6. Uso do protocolo da calculadora científica, este algoritmo consiste em utilizar as funções $a^{b/c}$ e c/d na calculadora científica, que permite introduzir a notação de frações e efetuar cálculos com frações. Alguns manuais atuais recorrem o uso da calculadora científica com modo de fração para o cálculo de divisão de frações (Figura 2).

Figura 2 – Algoritmo calculadora científica

$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$$

Fonte: Adaptado de Arias e Maza (1997, p. 14).

No quadro 2 constam o resumo dos algoritmos de maior influência em cada período histórico (CONTRERAS, 2012).

Quadro 2 – Influência dos algoritmos em cada período histórico

Período	Subperíodo	Algoritmos
Até o século XVI	Não há subperíodo	Produtos cruzados
Séculos XVII, XVIII a XIX	Séculos XVII a XVIII	Produtos cruzados
	Século XIX	Inverter e multiplicar
Século XX	Século XX até 1970	Inverter e multiplicar Redução ao denominador comum Método analítico raciocinado
	1970 - 1990	Inverter e multiplicar Multiplicar pela inversa da fração do divisor
	Época atual	Produtos cruzados Inverter e multiplicar Conversão de frações em decimais Uso do protocolo da calculadora

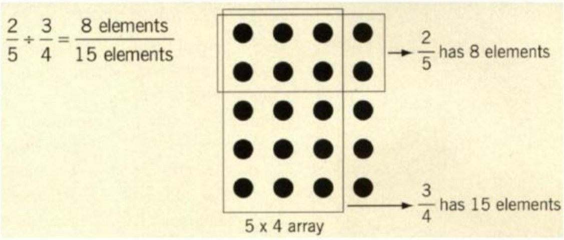
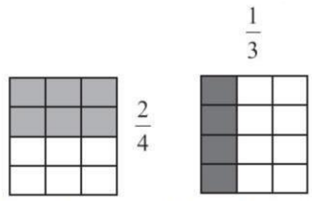
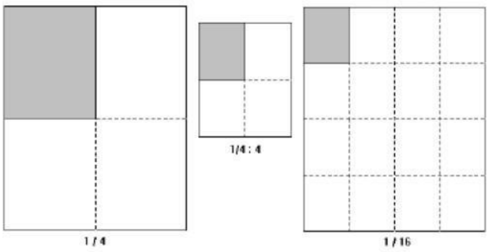
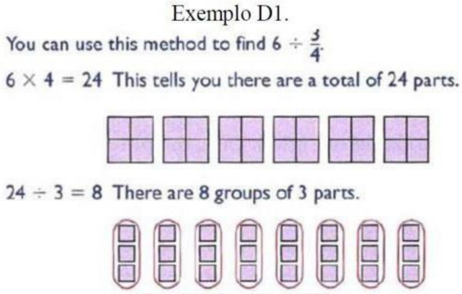
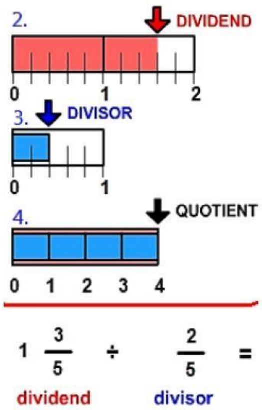
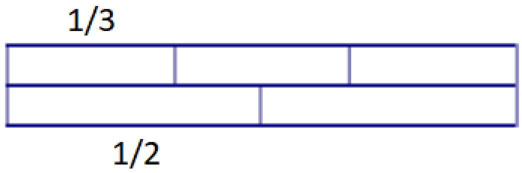
Fonte: Adaptado de CONTRERAS (2012, p. 52, tradução nossa).

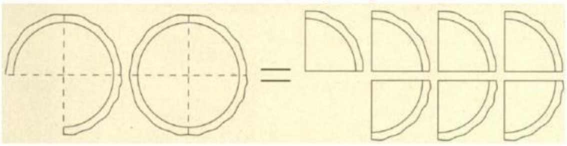
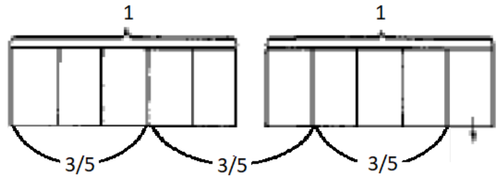
Embora tenham variado em quantidade e nomenclatura ao longo dos anos, são atualmente cinco as principais interpretações de frações: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado e operador (MOREIRA; FERREIRA, 2008).

2.3.2 Procedimentos alternativos da divisão de frações

A adoção de procedimentos alternativos para resolução de divisão de frações está presente na literatura especializada, esta prática inclui a adoção de esquemas pictográficos, diagramas, imagens de distintos objetos e formas geométricas. Conforme o curso de ação adotado em cada estratégia, estes procedimentos alternativos, também conhecidos como „resolver com desenhos‟, podem ser classificados em dois tipos: (i) Divisão de frações transformada em divisão de inteiros; (ii) Comparação de partes fracionadas e o divisor como unidade principal (MORIEL JUNIOR, 2014). A seguir, no quadro 3, apresentamos uma figura com exemplos de resoluções gráficas relacionadas à divisão de frações.

Quadro 3 – Tipos de procedimentos (geométrico ou pictórico) para divisão de frações e exemplos

TIPO 1. DIVISÃO DE FRAÇÕES TRANSFORMADA EM DIVISÃO DE INTEIROS	
Exemplo A1  (LI, 2008)	Exemplo B1. $\frac{2}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{6\, retangulozinhos}{4\, retangulozinhos}$  (GUERRA; SILVA, 2008)[17]
Exemplo C1. $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1\, retangulozinho}{16\, retangulozinhos}$  (CONTRERAS, 2012)	Exemplo D1.  (LI; CHEN; AN, 2009)
TIPO 2. COMPARAÇÃO DE PARTES FRACIONADAS E O DIVISOR COMO UNIDADE PRINCIPAL	
Exemplo A2.  (CHEN *et al.*, 2013)	Exemplo B2. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$  (CONTRERAS, 2012)

Exemplo C2. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 7$  (LI, 2008)	Exemplo D2. $2 \div \frac{3}{5} = 3\frac{1}{3}$  Três vezes 3/5 + 1/3 dos 3/5 (LIMA, 1983)

Fonte: MORIEL JUNIOR (2014, p.18).

2.3.3 INTERPRETAÇÕES DA DIVISÃO DE FRAÇÕES

Existe, na literatura, uma gama de nomenclaturas acerca dos significados, modelos, interpretações ou classificações do conceito de divisão de frações. Estudos recentes analisaram 60 produções na área e sintetizaram as nomenclaturas equivalentes em seis categorias, cada uma com a descrição da característica-chave associada (MORIEL JUNIOR, 2017; MORIEL JUNIOR, WIELEWSKI, CARRILLO, 2019). Elas representam a essência de problemas envolvendo divisão de frações (cf. Quadro 4).

Quadro 4 – Característica-chave de problemas de divisão de frações e respectiva equivalência entre nomenclaturas das interpretações de divisão de frações

NOMENCLATURAS EQUIVALENTES DAS INTERPRETAÇÕES	CARACTERÍSTUCA-CHAVE
Partição, Partição com foco em compartilhar ou dividir igualmente; Compartilhamento	1. Distribuição por inteiros
Medida, cotição ou subtração repetida; Empacotamento; Divisão medição por comparação	2. Comparação em uma grandeza
Inverso da multiplicação; Razão unitária; Inversão do fator multiplicativo; Divisão partição por comparação	3. Transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional
Proporção de valor unitário conhecido; Divisão medição equitativa	4. Proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido
Determinação da razão unitária; Divisão partição equitativa; Proporção de valor unitário desconhecido	5. Proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido
Divisão como inverso do produto cartesiano; Divisão de área retangular; Produto e fatores; Inverso do produto cartesiano ; Inversão da multiplicação (ou fator perdido)	6. Um fator desconhecido de um produto (área retangular)

Fonte: MORIEL JUNIOR (2017), MORIEL JUNIOR, WIELEWSKI, CARRILLO (2019).

Assim, se considerarmos, por exemplo, problemas que tenham por objetivo encontrar o valor unitário desconhecido (Q) a partir da relação entre as quantidades de duas grandezas distintas ($\frac{D}{d}$) – tal como o cálculo da densidade que envolve a proporção entre duas grandezas, massa e volume, conforme a característica chave 5 apontada no Quadro 4 – o cálculo realizado poderia adotar três interpretações para sua solução: Determinação da razão unitária; Divisão partição equitativa; e Proporção de valor unitário desconhecido (MORIEL JUNIOR, 2017). Assim como existem diversas interpretações para problemas envolvendo divisão de frações, também há diversos modelos semânticos da divisão dos naturais que fundamentam as diferentes formas textuais usadas para definir a divisão de frações. Estas formas textuais usualmente apresentam-se ligadas a algum tipo de nuance e esclarecimento. (CONTRERAS, 2012). A relação entre as seis características chave da divisão de frações e as formas textuais usadas para defini-las estão relacionadas no quadro 5.

Quadro 5 – Modelo semântico e formas contextuais da divisão de frações

MODELO SEMÂNTICO	FORMAS TEXTUAIS ASSOCIADAS
Partição (Distribuição por inteiros)	• Partir ou repartir igualmente "... faça um número dois, ou três ou mais partes iguais" (Pérez de Moya, 1562) "... dividir ou distribuir um dado número em partes iguais" (Lacroix, 1846) "... dividir um número em partes iguais" (Edelvives, 1945) "... distribuir em partes iguais" (Marjal, 1984)
Medida (Comparação em uma grandeza)	• Descubra quantas vezes um número se encaixa ou está contido outro "... descubra quantas vezes um número contém outro" (Vallejo, 1813). "... descubra quantas vezes um número, chamado dividendo, contém outro divisor chamado "(Edelvives 1934). • subtração repetida "... tire um número de outro quantas vezes ele contiver ele " (Corachán, 1699). "... descubra quantas vezes você pode subtrair o subtraendo de minuendo" (Vallejo, 1813).
Inversão da multiplicação ou fator perdido (transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional)	b.3.1) Reversão do produto dos fatores: fator de perda. "... dado um produto e um dos fatores, entramos conhecimento do outro fator" (Vallejo, 1813). "... você procura um fator quando conhece o outro fator e o produto de ambos" (Edelvives, 1934). "... conhecendo o produto de dois fatores e um deles, descubra o outro" (Bruño, 1939). b.3.2) Reversão da adição repetida: subtração repetida. "... podemos descobrir por meio do subtração quantas vezes está contido no produto determinado o fator que supomos conhecido" (Lacroix, 1797). b.3.3) Reversão do produto cartesiano. "... é outro número que multiplicado pelo divisor dá o dividendo" (García Roca, 1965).
Inversão do fator Multiplicativo (Um fator desconhecido de um produto, área retangular)	• Faça tantas vezes menos "... dividir é fazer um número tantas vezes menor quanto unidades tem outro" (Dalmau Carles, 1898). "... reduza as unidades da espécie inferior à superior" (Dalmau Carles, 1929). "... faça 3 quatro vezes menor, ou o que é o mesmo, ache a quarta parte de 3. Ou seja, 3 é reduzida a sua quarta parte" (Suarez Somonte, 1932)
Proporção de valor unitário Desconhecido (proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido)	• O número que é para a unidade como o dividendo é para o divisor. "... procure outro terceiro número que tenha estado com a unidade em tal proporção como o número que começamos com o divisor" (Pérez de Moya, 1562). "... a mesma razão tem o quociente com a unidade, que a quantidade com o partidor ..." (Corachán, 1699).

Proporção de valor unitário Conhecido (proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido)	• O número que é para o dividendo como a unidade é para o divisor "... encontre um terceiro número, relativo ao primeiro que a unidade é relativa ao segundo" (Moya, 1897). "... quebrar um número chamado dividendo em tantas partes iguais como unidades têm outro chamado divisor" (Bruño, 1939).

Fonte: Adaptado de Contreras (2012, p.72, tradução nossa); Moriel Junior (2017), Moriel Junior, Welewski, Carrillo (2019).

2.4 Conhecimento especializado de professores de matemática – MTSK

O *Mathematics Teachers" Specialized Knowledge (*MTSK) é um modelo teórico sobre o conhecimento especializado que é específico de professores de Matemática, seu objetivo é descrever o conjunto de conhecimentos especializados que o professor possui, declara ou mostra para o ensino da Matemática, o modelo é também considerado uma ferramenta metodológica para exploração analítica deste conjunto de conhecimentos (AGUILAR et al., 2013; CARRILLO et al., 2014). Este modelo, que considera a especificidade do conhecimento em relação à Matemática (CARRILLO et al., 2014), surge em resposta a problemas de delimitação entre os subdomínios do MKT e às dificuldades em seu uso para investigar elementos particulares do conhecimento. Considera o progresso e as propostas de diferentes modelos de conhecimento profissional do professor (SHULMAN, 1986; ROWLAND et al., 2005; BALL et al., 2008), em particular, a distinção em dois domínios de conhecimento: o Conhecimento Matemático (MK) e o Conhecimento Didático Pedagógico (PCK) (FLORES-MEDRANO, 2015).

O livro *"Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas"* (CARRILLO et al., 2014) é a obra referencial para investigação do conhecimento especializado do professor de Matemática. Idealizado pelo grupo SIDM, a obra conceitua um modelo de conhecimento profissional, o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) contendo a explicação do modelo teórico e seu processo de construção, incluindo: (i) reflexão da posição epistemológica dos autores sobre conhecimentos, crenças e concepções, fundamental para entender o que chamam de conhecimento, porque é o modelo de conteúdo MTSK, e entendem que não faz sentido considerar um modelo sem um conceito estabelecido sobre o que se pretende perspectiva de modelagem; (ii) explicação das concepções sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, entendendo que a percepção de conhecimento do professor é influenciada pela forma como os autores entendem os processos de ensino e aprendizagem; (iii) proposta de um modelo que responde à complexidade do conhecimento necessário para ensinar aula de Matemática.

O MTSK possui um foco analítico com o objetivo de obter informações sobre o conhecimento do professor, mais especificamente, sobre os elementos que formam este conhecimento e as interações entre eles. Esse modelo considera apenas os componentes especializados do conhecimento dos professores de Matemática, ou seja, seu conhecimento da Matemática como objeto de ensino e aprendizagem, portanto não tem interesse em outros tipos de conhecimento compartilhados com professores de outros assuntos (como o conhecimento pedagógico geral), nem em saber se alguns elementos do conhecimento são compartilhados com outros profissionais que usam a Matemática, por exemplo, o conhecimento de derivados, que é de particular interesse para os engenheiros (CARRILLO et al., 2018). O MTSK não se limita a fornecer um instantâneo do conhecimento que um professor implantou, nem um exemplo particular de seu ensino, pois também nos permite refletir sobre outros tipos de conhecimento, o que pode ter levado a resultados diferentes nessa situação. Porém, isso não significa que o modelo não possa ser usado para fins de avaliação, como acontece, por exemplo, na sua aplicação na formação inicial de professores, cujo contexto, evidentemente, faz sentido para contrastar o conhecimento de futuros professores com uma proposta de conhecimento desejável (CARRILLO et al., 2017).

Assim, alguns pontos importantes sobre o MTSK são (FLORES-MEDRANO, 2015):

- O MTSK é um modelo, com suporte teórico e empírico, do conhecimento especializado de professores de Matemática. Assim sendo, ele visa representar, de forma simplificada, os fenômenos envolvidos na construção e na manifestação desta base de conhecimentos, com o objetivo de explicá-la ou atuar sobre ela. Por ser uma representação da realidade, o modelo MTSK subdivide os conhecimentos de professores de Matemática em domínios, subdomínios e categorias para compreendê-los através de uma abordagem analítica.
- Tem uma natureza dupla na medida em que é um modelo teórico do conhecimento especializado do professor de Matemática e uma ferramenta metodológica para explorar o conhecimento especializado do professor em diferentes situações de seu trabalho e treinamento.
- O MTSK não se propõe a modelar o conhecimento ideal que esperamos para o professor de Matemática, assim não se entende que o professor ideal será aquele que tem conhecimento em cada uma das categorias de cada um dos subdomínios, sendo isto apenas uma consequência possível. Da mesma forma, pelo fato de o MTSK não

tratar do conhecimento ideal, não há a adoção de uma referência para conhecimento matemático ou conhecimento didático do conteúdo.

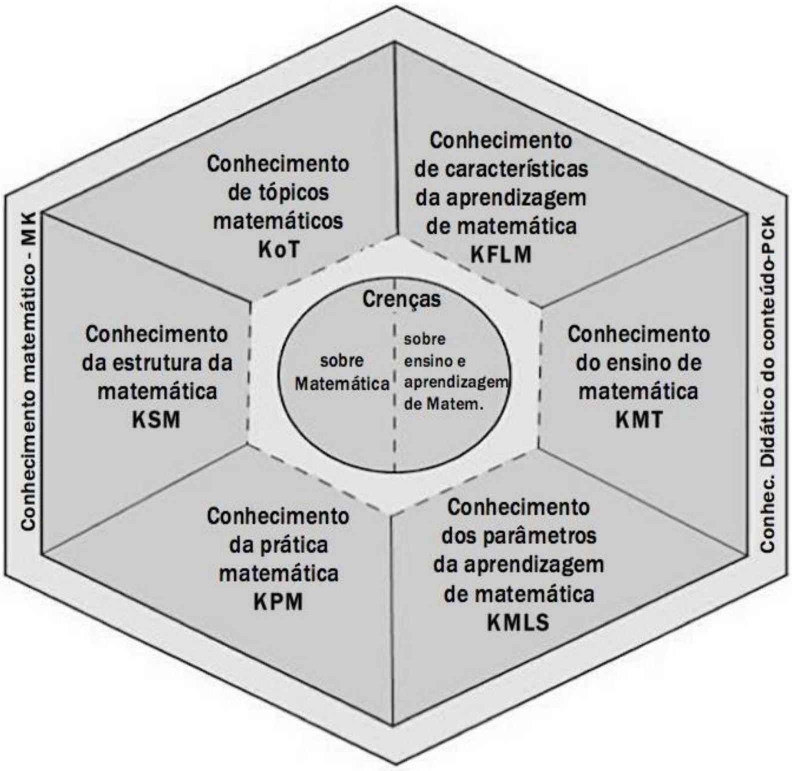
- As pesquisas nas quais se pretende aprofundar o estudo de aspectos específicos do MTSK requerem uma sensibilidade teórica que ajude no fortalecimento teórico das categorias, na seleção e análise de episódios.
- Não estuda o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. O modelo pode observar o que o professor teve em termos de conhecimento, mas isso não implicaria necessariamente no desenvolvimento profissional.
- Compreende que o ensinar e o aprender, especialmente nas tendências escolares atuais, são duas atividades que não podem ser separadas.

O paradigma a partir do qual o modelo é desenvolvido e, portanto, a partir do qual realiza a abordagem do conhecimento profissional, é interpretativa, vinculada à compreensão da natureza do conhecimento colocado em prática pelo professor e a como os diferentes componentes são articulados (CARRILLO et al., 2017).

A necessidade de ampliar a compreensão desses conhecimentos especializados de professores de Matemática torna-se relevante para esse profissional, pois pode ser usada com fins formativos. Esse modelo foi idealizado por CARRILLO et al. (2014) e o Grupo SIDM da Universidade de Huelva (Espanha).

É constituído por dois domínios – Conhecimento de conteúdo matemático (MK) e Conhecimento didático de conteúdo (PCK) – sendo cada um deles subdividido em três subdomínios (conforme Figura 3).

Figura 3 – Domínio e subdomínios do MTSK



Fonte: Original (CARRILLO et al., 2014) traduzido (MORIEL JUNIOR; WIELESWKI, 2017).

No centro do modelo, estão as crenças que o professor possui sobre Matemática e sobre seu ensino e aprendizagem, como uma dimensão que permeia o conhecimento do professor. Consideramos as crenças como verdades pessoais com elementos avaliativos e afetivos, enquanto as concepções referem-se a esquemas que organizam os conceitos, formando como resultado e confronto a elaboração de nossas próprias experiências, sendo sua natureza, fundamentalmente, cognitiva (PONTE, 1994).

O MTSK não é apenas uma proposta teórica para modelar o conhecimento do professor de Matemática, uma vez que também atua como um instrumento metodológico, com o qual é possível analisar a prática, na amplitude da sua palavra, do professor de Matemática através das suas categorias (FLORES; ESCUDERO; AGUILAR, 2013).

Do ponto de vista do MTSK, o conhecimento profissional sustenta o desenvolvimento do professor e, além disso, é o produto desse desenvolvimento e a reflexão sobre sua prática, que não ocorre apenas em sala de aula, pois é nutrida pelo conhecimento do professor (CARRILLO et al., 2014). Além disso, o foco deste modelo é o conhecimento de um professor cuja atividade profissional está ligada ao ensino de Matemática, com o qual eles são apenas parte da conceituação dos elementos em que o conteúdo matemático tem relevância (CARRILLO et al., 2017).

Algumas categorias dos subdomínios no domínio do Conhecimento Didático do Conteúdo do MTSK explicitamente incluem o que consideramos ser a natureza prática do conhecimento profissional. Entende-se que o conhecimento do professor sobre a aprendizagem de conteúdos matemáticos e seu ensino pode ser baseado na reflexão sobre a prática, que pode interagir com outras fontes, pois:

> Embora não haja menção explícita nas categorizações dos subdomínios do MK, entendemos que o professor também aprende MK a partir da prática (em um sentido amplo, não apenas na sala de aula); isto é, o conhecimento matemático do professor é transformado, juntamente com seu conhecimento didático do conteúdo, com a prática (CARRILLO et al., 2014, p. 49, tradução nossa).

O domínio do conhecimento matemático abrange não somente os conceitos e procedimentos matemáticos, mas inclui também a estrutura das grandes ideias matemáticas, o conhecimento das conexões entre conceitos, dos norteadores que tornam válidos determinados tipos de argumentações e demonstrações em Matemática e o conhecimento da linguagem e precisão em Matemática (CARRILLO et al., 2014); enquanto que o domínio do conhecimento didático do conteúdo diz respeito às diferentes formas de ensinar e aprender o conteúdo matemático (VASCO, 2015).

Os subdomínios do MTSK e suas conexões podem nos ajudar a entender o conhecimento especializado necessário para ensinar Matemática, sendo que a caracterização em subdomínios e categorias internas destes é a estrutura fundamental no modelo (CARRILLO et al., 2014). A seguir são apresentados os subdomínios do modelo MTSK e suas respectivas categorias. Inicia-se com a descrição dos subdomínios do domínio do conhecimento matemático e, na sequência, tem-se os três do domínio do conhecimento didático do conteúdo.

2.4.1 O CONHECIMENTO DE TÓPICOS MATEMÁTICOS – KOT

É definido como um conhecimento profundo e bem fundamentado de conteúdos matemáticos, típico de professores de Matemática e de seu trabalho docente (VASCO, 2015).

Assim busca-se neste subdomínio identificar o conhecimento docente do conteúdo matemático e seus significados de forma fundamentada, considera-se o conhecimento com um nível de aprofundamento superior ao esperado para os alunos (CARRILLO et al., 2014).

O conhecimento da Matemática escolar também está incluído neste subdomínio, bem como sua base teórica, seus procedimentos (padrão e alternativos) e as diferentes formas de representação de um conteúdo utilizadas pelo professor para ensino do conteúdo matemático.

Nesse subdomínio, também se considera aspectos da comunicação matemática que possui uma linguagem própria com regras específicas que permitem a interpretação de sua própria disciplina. Há uma variedade de noções (medidas, magnitude, ...), conectores lógicos, quantificadores e símbolos (<, >, %, + ...) típicos da Matemática e de sua sintaxe, como expoentes, parênteses etc. (ROJAS, 2014).

O KoT possui categorias associadas ao conhecimento sobre: definições, propriedades e seus fundamentos (conexões intra-conceituais); procedimentos (Como se faz? Quando isso pode ser feito? Por que faz assim? Características do resultado); registros de representação; fenomenologia e aplicações de conceitos matemáticos (CARRILLO et al., 2014).

A categoria *definições* considera o conhecimento do conjunto de propriedades que definem um determinado objeto matemático, inclui também as formas alternativas que o professor pode usar para definir este objeto. (CARRILLO et. al, 2014).

Quanto aos p*rocedimentos*, estes incluem o conhecimento de algoritmos convencionais e alternativos, como são feitos ou utilizados, as condições suficientes, quando pode ser feito ou usado o fundamento dos algoritmos ou por que é feito ou usado, implicando uma conexão com as propriedades e seus fundamentos, além das características que o objeto resultante teria associado ao assunto em questão (AGUILAR et al., 2013).

A *fenomenologia* inclui aqueles fenômenos (contextos, situações e problemas) que estão na origem do conceito e que lhe dão significado sentido (GARCÍA, 2013). Ressalta-se que:

> A categoria Fenomenologia tem um caráter bivalente. Por um lado, consideramos o conhecimento que o professor tem acerca de modelos atribuíveis a um tópico, vistos estes como fenômenos que podem ser usados para gerar conhecimento matemático, entre eles, aqueles que aparecem na origem do próprio conceito. Por exemplo, o conhecimento que tem um professor sobre o tipo de problema ad hoc para cada algoritmo para resolver uma divisão de frações (Flores, 2008) seria nesse sentido da categoria. Por outro lado, considera-se o conhecimento que tem sobre os usos e aplicações de um tema (CARRILLO et.al., 2014, p.74-75, tradução nossa).

O conhecimento que um professor possui sobre a resolução de um determinado tipo de problema de cada algoritmo para resolver uma divisão de frações (FLORES, 2008) é um exemplo de conhecimento do subdomínio KoT.

2.4.2 O CONHECIMENTO DA ESTRUTURA DA MATEMÁTICA – KSM

Este subdomínio aborda o conhecimento da Matemática na perspectiva de sua integração e do relacionamento em estruturas amplas e com maior capacidade de se relacionar com outros conceitos. Integra tanto as relações com conceitos mais avançados, quanto elementares. O KSM especificamente possui as seguintes categorias (CARRILLO et al., 2014; ROJAS, 2014):

i) Conexões de Complexização: referem-se ao conhecimento de relacionar os conteúdos ensinados com conteúdos posteriores e reflete o conhecimento de um tópico ou conceito que é ensinado em um determinado nível de ensino de uma perspectiva avançada. Significa que um ou mais conceitos matemáticos terão ou poderão ter conexões futuras com o que está sendo trabalhado agora. Reflete o conhecimento de um tópico ou conceito que é ensinado em um determinado nível de ensino de uma perspectiva avançada. Conhecer como certo conceito é trabalhado hoje, possibilita a construção ou o desenvolvimento de outros mais complexos. Temos como exemplo o conhecimento de que a divisão por fração, quando apoiada por uma representação verbal na forma de uma pergunta, onde $30 \div \frac{1}{2} =$? é representado por?

ii) Conexões de Simplificação: referem-se a relacionar conteúdos ensinados com conteúdos anteriores, refletindo o conhecimento de um assunto ou conceito que é ensinado em um determinado nível escolar de uma perspectiva mais elementar. Significa saber como um ou mais conceitos matemáticos anteriores são ou podem ser conectados ao conteúdo ensinado, o que é equivalente a saber como um certo conceito trabalhado hoje pode ser simplificado por outro anterior mais elementar (FLORES-MEDRANO et al., 2014). Um exemplo dessa conexão é o conhecimento da interpretação parte-todo com números naturais para simplificar o trabalho com a divisão de frações (MORIEL JUNIOR, 2014).

iii) Conexões de Transversais: referem-se à natureza de alguns conceitos que aparecem quando se lida com outros conceitos ao longo da Matemática escolar (MONTES; CLIMENT, 2016). Os conceitos conectados não são mais simples ou mais complexos entre si, mas existe algo comum entre eles que os relaciona, isto é, uma característica comum em sua natureza ou no modo de pensar associado a eles (FLORES-MEDRANO et al., 2014). Tem-se como exemplo a relação entre o raciocínio envolvido para reduzir fações a um denominador comum e a divisão de frações, assim, ao explicar a divisão de frações ($\frac{2}{3} : \frac{4}{5} \leftrightarrow \frac{10}{15} : \frac{12}{15}$), oprofessor pode valer-se da similaridade de pensamento com a redução destas a um denominador comum ($\frac{2}{3} < \frac{4}{5} \leftrightarrow \frac{10}{15} < \frac{12}{15}$) para facilitar a compreensão do aluno (VASCO; MORIEL JUNIOR; CONTRERAS, 2017).

iv) Conexões Auxiliares: são consideradas quando um conceito ou tópico diferente daquele está sendo tratado – ou seja, que não é o foco da atividade matemática que está sendo desenvolvida – aporta elementos que ajudam no desenvolvimento da atividade daquele momento (MONTES; CLIMENT, 2016). O professor usa um conceito ou tópico diferente daquele com o qual ele está lidando para adicionar um elemento que, sem ser o foco da atividade matemática, fornece elementos que o embasam. Por exemplo, encontrar as raízes de uma equação como um elemento auxiliar para construção do gráfico de uma função (FLORES-MEDRANO et al., 2014).

Assim percebe-se que o KSM é o conhecimento das relações que o professor faz entre conteúdos (MONTES et al., 2013), seja do curso que está ensinando ou com conteúdo de outros cursos ou níveis educacionais. Trata-se especificamente de conexões entre tópicos matemáticos (CARRILLO et al., 2014).

2.4.3 O CONHECIMENTO DA PRÁTICA MATEMÁTICA – KPM

Este subdomínio diz respeito ao conhecimento dos modos de proceder em Matemática, ressaltando que é importante o "professor não só conhecer os resultados matemáticos estabelecidos (conhecimento considerado no KoT), mas também as maneiras de proceder para implementá-los e as características do trabalho matemático" (CARRILLO et al., 2014, p.78).

Inclui o conhecimento das formas de conhecer e criar ou produzir em Matemática (conhecimento sintático sobre lógica em Matemática), raciocínio e prova, sabendo como definir e usar definições, estabelecendo relações (entre conceitos, propriedades etc.), correspondências ou equivalências ou escolher representações, argumentar, generalizar ou explorar e os aspectos da comunicação matemática (ROJAS, 2014).

Pode ser definido como a compreensão do conhecimento sobre como desenvolver a Matemática, necessário para fornecer ao professor estruturas lógicas de pensamento (FLORES-MEDRANO et al., 2014), ou seja, é o conhecimento sobre as formas de proceder, independentemente do conceito abordado ou referenciado a conceitos ou tópicos específicos que subsidiaram esta investigação.

> KPM é o conhecimento das formas de proceder e produzir em matemática e que também considera o conhecimento da sintaxe em matemática. Está associado ao conhecimento da lógica do trabalho matemático. As práticas que consideramos demonstrar (incluímos também as ideias de argumentação, justificação e validação), definem, exemplificam e usar heurística.[...]Até o momento ainda não temos indicadores específicos para esse subdomínio, mas trabalhar com oportunidades de pesquisa nos permitiu avançar no estudo e no futuro próximo ser capaz de oferecer resultados mais concretos com os quais esperamos contribuir para a compreensão deste tipo de conhecimento matemático raramente explorado em sua totalidade no professor (FLORES-MEDRANO, 2014, p. 142, tradução nossa).

São indicadores desse subdomínio: hierarquização e planificação como forma de proceder à resolução de problemas matemáticos; formas de validação e demonstração; papel dos símbolos e uso da linguagem formal; conhecimentos elementares associados à resolução de problemas como forma de produzir Matemática; práticas particulares de fazer Matemática, por exemplo modelagem; condições necessárias e suficientes para gerar definições (CARRILLO et al., 2014).

Este subdomínio é essencial para que o professor não apenas seja capaz de conhecer os diferentes temas que poderia ensinar, bem como a sua integração à estrutura matemática e, ainda, o conhecimento para gerir seu próprio raciocínio matemático (CARRILLO et al., 2014).

Os três subdomínios já descritos compõem o domínio do conhecimento matemático, a seguir apresenta-se os três subdomínios que integram o domínio denominado conhecimento didático do conteúdo (PCK).

2.4.4 O CONHECIMENTO DE CARACTERÍSTICAS DA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA– KFLM

Este subdomínio responde à necessidade de o professor conhecer o modo de pensar do aluno em relação às tarefas matemáticas. É um subdomínio que contém o conhecimento da aprendizagem matemática e abrange tudo o que diz respeito à produção de aprendizagem de Matemática. O professor deve ter conhecimento sobre as dificuldades dos alunos ao abordar um tópico matemático. Este subdomínio engloba conhecer certas teorias ou perspectivas que contribuem para a caracterização do processo de aprendizagem da Matemática, bem como o conhecimento sobre a diferença entre aprender e ensinar.

> Concordamos com os pesquisadores (SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008; PINTO, 2010) que reconhecem a importância de ter um conhecimento que permita ao professor desenvolver as habilidades necessárias para interpretar produções dos alunos ou desenvolver a capacidade de antecipar possíveis raciocínios, bem como associar diferentes contextos que influenciam a aprendizagem, a fim de obter controle sobre o processo de aprendizagem de seus alunos e compreender a origem de tais raciocínios, erros, dificuldades de aprendizagem ou concepções (ESCUDERO-ÁVILA et al., 2016, p.32, tradução nossa).

As teorias da aprendizagem (formal ou pessoal), os pontos fortes, potencialidades e dificuldades; as formas de interação com o conteúdo matemático; os interesses e as expectativas dos estudantes fazem parte das categorias desse subdomínio.

O subdomínio KFLM tem, entre outras categorias, as Teorias da Aprendizagem, entre as quais destacamos APOS, uma teoria construtivista da aprendizagem em Graduação em Pesquisa em Educação Matemática, que tem como hipótese que o conhecimento matemático consiste em um tendência do indivíduo em lidar com situações de problemas matemáticos percebidos através da construção de ações, processos e objetos e organizá-los em esquemas para compreender as situações e resolver os problemas (ARNON et al., 2014).

Conhecer concepções e ideias prévias dos alunos sobre o conteúdo das frações, apresentar tarefas matemáticas que reforcem os conceitos ou procedimentos matemáticos relacionados às dificuldades de aprendizagem dos aluno são exemplos de KFLM (ROJAS, 2014).

2.4.5 O CONHECIMENTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA – KMT

É um conhecimento específico do professor de Matemática, que faz a integração da Matemática e do ensino. Inclui, por exemplo, estratégias de ensino associadas a tópicos específicos; materiais e recursos que facilitam a aquisição de conceitos; e conhecimentos teóricos sobre o ensino da Matemática, como a Teoria do Espaço de Trabalho Matemático (KUZNIAK, 2011).

É um conhecimento que permite ao professor escolher uma representação ou material para aprender um conceito ou um procedimento matemático. Este conhecimento permite selecionar alguns exemplos ou uma tarefa matemática, assim como escolher um livro de texto. Para ajudar os alunos a entender o significado de um objeto matemático, neste subdomínio localizam-se conhecimentos para abordar uma série estruturada de exemplos e conhecimento de recursos do ponto de vista de seu conteúdo matemático (CARRILLO et al., 2013). Nesse subdomínio tem-se como categorias as Teorias de ensino (formal ou pessoal); os

Recursos materiais e virtuais (livros didáticos, Tangrans, softwares como Cabri ou Geogebra); as estratégias, as técnicas, as tarefas e os exemplos. Os conceitos matemáticos devem ser aprendidos com apoio de modelos concretos e simbólicos (VALE, 2002).

Citamos como exemplo de KMT: conhecer estratégias para resolver um erro ou uma dificuldade; e conhecer ou saber desenvolver enredos que facilitem a aquisição de conceitos e procedimentos (ROJAS, 2014); por exemplo, o conhecimento da estrutura geral da proposta da Teoria de Situações Didáticas de Brousseau (FLORES-MEDRANO et al., 2014). Para melhor compreensão do subdomínio KMT utilizamos o quadro 6, onde as subcategorias são entendidas como os conhecimentos mobilizados da categoria do KMT (atividades, tarefas, exemplos e ajudas) e os indicadores que entendemos como a ação dessa subcategoria.

Quadro 6 – Categorias e indicadores do subdomínio KMT

CATEGORIA	SUB-CATEGORIA	INDICADOR
Atividades, tarefas, exemplos e ajudas	Conhecimento das características dos exemplos de tarefas e atividades	KMT1. Conhecer o potencial do exemplo contextual para criar um ambiente de significado antes de introduzir a definição formal de um conceito.
		KMT2. Saber da potencialidade do exemplo como um meio de destacar ou enfatizar os aspectos singulares do conteúdo matemático que deve ser ensinado.
		KMT3. Saber criar, propor e explorar situações-problema na forma de exemplo ou exercício, para que os alunos possam produzir sentido e significado para o conteúdo matemático.
	Conhecimento de diferentes formas de conduzir, canalizar e dar orientações para problemas levantados na aprendizagem matemática	KMT4. Saber que tipo de ajuda matemática dar aos alunos em situações de confusão ou dificuldade, com a intenção de que eles possam dar solução a uma tarefa.
		KMT5. Saber uma estratégia para os alunos entenderem ou darem um exemplo, exercício ou problema, consiste em indicar qual a atividade de demanda.
		KMT6. Saber como apontar para os alunos alguns dados do problema que não aparecem explícitos e que serão utilizados para resolvê-lo.

Fonte: FLORES-MEDRANO (2015, p. 118, tradução nossa).

2.4.6 O CONHECIMENTO DOS PARÂMETROS DA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA – KMLS

Nesse subdomínio incluem-se os conteúdos propostos nas normas curriculares dos níveis de ensino. Por exemplo, saber o que o currículo indica que deve ser aprendido em cada nível, conhecendo os materiais ou recursos propostos e, também, os regulamentos para abordar os conteúdos. Inclui, ainda, os objetivos de conhecimento e de padrões de aprendizagem além dos que vêm do ambiente institucional do professor. As expectativas de aprendizagem, o nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado e a sequenciação com temas anteriores e posteriores também são categorias desse subdomínio.

> O KMLS implica saber lidar com a questão matemática em documentos oficiais, refletindo no ensino os conteúdos mínimos previstos no currículo escolar básico, qual é a prática usual no ciclo educacional em que se encontra, quais outras formas de enfrentamento o seu ensino é recomendado em documentos profissionais de outros países ou comunidades (ROJAS, 2014, p. 102, tradução nossa).

São exemplos destes conhecimentos: conhecer em que etapa do currículo escolar os conceitos, propriedades, relações, problemas etc. do tema dos números racionais encontram-se nos documentos escolares de referência ou nos documentos oficiais que tratam do processo de ensino.

Após apresentarmos a fundamentação teórica sobre a formação de professores, os aspectos do ensino e aprendizagem de frações e divisão de frações e, ainda, o referencial teórico do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) e seus componentes passamos ao capítulo do encaminhamento metodológico adotado para atender aos propósitos desta investigação.

3 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Descrevemos neste capítulo a opção metodológica adotada contemplando a natureza da pesquisa, o contexto e sujeitos da pesquisa, os instrumentos de coleta das informações e de análise dos dados.

3.1 Natureza da pesquisa

Para atender o objetivo desta pesquisa, empregamos o método qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), com o propósito de aprofundar e compreender aspectos de conhecimento manifestos pelos sujeitos, licenciandos em Matemática. A pesquisa adota a abordagem qualitativa segundo as características indicadas por BOGDAN e BIKLEN (1994), conforme sintetizado no quadro 7.

Quadro 7 – Principais características da investigação qualitativa

CARACTERÍSTICAS DA PESQUISA QUALITATIVA INDICADA POR BOGDAN E BIKLEN (1994)	CARACTERÍSTICAS DA PESQUISA QUALITATIVA PRESENTES NESTA PESQUISA
1 A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.	A fonte direta de dados sobre a mobilização dos conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações foi um ambiente formativo de futuros professores de Matemática em que o próprio investigador desenvolveu a formação e coletou os dados.
2 É descritiva.	A apresentação dos resultados foi feita por meio de descrições da mobilização dos conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações, incluindo trechos das transcrições e registros visuais das manifestações dos sujeitos para a validação desta análise e, consequentemente, ampliando a validade da pesquisa.
3 Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.	O interesse maior desta pesquisa é compreender o processo de mobilização/construção dos conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações em ambiente formativo envolvendo discussão sobre situações de prática, e não de avaliação dos sujeitos e seus conhecimentos.
4 Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.	No decorrer da análise os dados foram comparados e agrupados segundo categorias MTSK e o impacto da oficina emergiu dos dados.
5 O significado é de importância fundamental na abordagem qualitativa.	Buscou-se compreender a mobilização dos conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações do ponto de vista de futuros professores de Matemática em um contexto formativo baseado em situações de prática de ensino e aprendizagem de divisão de frações mediante as próprias colocações e significações dos sujeitos para os assuntos apresentados durante a oficina formativa.

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

3.2 CONTEXTO E SUJEITOS DA PESQUISA

O **contexto da pesquisa** foi composto por três Instituições Públicas de Ensino que ofertam cursos de licenciatura em Matemática no estado de Mato Grosso. Todas demonstraram disponibilidade para a realização desta pesquisa, manifestando interesse do corpo docente do curso em oportunizar a seus alunos a participação em um processo de pesquisa. Entretanto, na primeira delas não foi possível disponibilizar uma data para a coleta de dados. Na segunda, realizamos o estudo piloto para aprimorar a estratégia de obtenção de dados. E a terceira foi efetivamente onde os dados desta pesquisa foram obtidos.

Com relação à realização de estudo piloto, sua importância está na possibilidade de testar, avaliar, revisar e aprimorar os instrumentos e procedimentos de pesquisa. Administra-se um estudo piloto com o objetivo de descobrir pontos fracos e problemas em potencial, para que sejam resolvidos antes da implementação da pesquisa propriamente dita (CANHOTA, 2008; BAILER; TOMITCH; D‟ELY, 2011), assim realizamos o 1º Piloto da oficina formativa com o grupo GIMC e em seguida realizamos o 2º Piloto no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, IFMT, campus Campo Novo do Parecis. Apenas após a realização destes dois pilotos e incorporação de suas contribuições na estrutura da oficina formativa conduzimos, na terceira etapa, a oficina que foi de fato o objeto da pesquisa.

No tocante à escolha da atividade formativa, ao invés de apenas observamos aulas no curso de licenciatura, utilizamos a estratégia de ofertar um tipo particular de oficina de curta duração (3 horas). Isto se deu pelo seu potencial de interação entre os participantes para construção de conhecimentos, pois “as oficinas são espaços com potencial crítico de negociação de sentidos, permitindo a visibilidade de argumentos, posições, mas também de deslocamentos, construção e contraste de versões [...]” (SPINK; MENEGON; MEDRADO, 2014, p. 33). Para tanto, utilizamos a estratégia da “Oficina Formativa”, adaptada de Moriel Junior (2014, p.40), por meio da qual “buscamos criar um ambiente propício à colaboração, onde os participantes puderam elaborar respostas com base em seu conhecimento e experiências, socializando-as com os demais e que puderam discutir possibilidades de resposta”.

A oficina formativa foi planejada privilegiando-se a abordagem de situações que proporcionassem o contato dos sujeitos licenciandos com a realidade mais próxima possível da prática da escola básica referente ao ensino e à aprendizagem de divisão de frações. Detalharemos esta estratégia na seção seguinte relativa à coleta de dados.

Para a seleção dos sujeitos, foi realizada uma reunião com os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, para explicar o objetivo da pesquisa e os critérios da escolha dos participantes a serem escolhidos a partir do grupo maior de frequentadores de uma disciplina de Didática no referido *campus* com os seguintes critérios preferenciais:

Em relação aos sujeitos da pesquisa, realizamos uma reunião com acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática para explicar o objetivo da pesquisa e confirmar a aceitação dos interessados em participar da oficina. Após isso, definimos o dia e horário da oficina formativa (8 de maio de 2018, de 19 a 22 horas).

Quanto à **seleção dos sujeitos** dessa investigação foram selecionados a partir de uma triagem com a coordenação do curso a partir dos seguintes critérios preferenciais:

1. Interesse voluntário e disponibilidade de participação na pesquisa;
2. Ter ultrapassado metade do curso;
3. Ter experiência no magistério;
4. Ter participado em algum tipo de pesquisa;
5. Ter participado do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

O último critério, relacionado ao programa PIBID, nos parece ser muito relevante por estar associado à qualidade e quantidade das manifestações dos sujeitos durante a coleta de dados, o que fortalece a consecução do objetivo desta pesquisa. De acordo com o programa PIBID oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos presenciais que se dediquem ao estágio nas escolas públicas e que, quando graduados, se comprometam com o exercício do magistério na rede pública. O objetivo é antecipar o vínculo entre os futuros mestres e as salas de aula da rede pública. Com essa iniciativa, o PIBID faz uma articulação entre a Educação Superior (por meio das licenciaturas), a escola e os sistemas estaduais e municipais (DOMINSCHEKI ; ALVES, 2017).

A partir dos critérios estabelecidos foram selecionados seis licenciandos, observando que as identidades desses sujeitos serão mantidas em sigilo para preservar o anonimato dos licenciandos, de acordo com Termo de Consentimento Livre Esclarecido – TCLE, assinado por eles, evitando que haja qualquer tipo de transtorno causado pelas informações recolhidas pelo pesquisador, de modo que no decorrer da análise esses licenciandos serão identificados com a sigla L e um número índice: **L1, L2, L3, L4, L5, L6**, enquanto que o investigador será codificado pela letra **I**.

Quanto à **descrição dos sujeitos**, os licenciandos se apresentaram no início da oficina formativa e explanaram suas experiências e expectativas em relação ao curso de Licenciatura em Matemática, sendo que todos eles estavam cursando o sexto semestre. Foi relatado por **L1** sua experiência em ensino substituindo um professor de Matemática, **L2** inicialmente era bolsista de iniciação docência do PIBID e atualmente bolsista de iniciação científica; **L3** é bolsista do PIBID; **L4** relata experiências de substituições de Matemática e também de Ciências, e pretende fazer mestrado na área de Matemática; **L5** atua como bolsista de iniciação científica, já ministrou minicursos na área de Matemática e lecionou em estágio supervisionado; **L6** ministrou minicurso na área de Matemática e foi bolsista em um projeto que foi organizado em Matemática. O resumo dos critérios atendidos por cada licenciando consta no

Quadro 8.

Quadro 8 – Resumo dos critérios de escolha dos participantes da pesquisa

Critério de escolha dos participantes da pesquisa	Licenciandos que atendem ao critério de escolha					
	L1	L2	L3	L4	L5	L6
Interesse voluntário e disponibilidade de participação na pesquisa	X	X	X	X	X	X
Ultrapassado metade do curso	X	X	X	X	X	X
Experiência no magistério	X			X	X	X
Participado em algum tipo de pesquisa		X		X	X	X
Participado do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)		X	X			

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

3.3 SOBRE A OBTENÇÃO DE DADOS

Para a **obtenção de dados** utilizamos a estratégia da oficina formativa concebida por Moriel Junior (2014), tornando favorável a mobilização de conhecimentos especializados e a troca de experiências por parte dos sujeitos da pesquisa a partir da condução do pesquisador que inclui, não só a colocação de questões baseadas em situações de prática de sala de aula relacionados ao ensino e à aprendizagem de divisão de frações, mas também à criação de oportunidades para mobilizar ou mesmo construir conhecimento especializado.

Entende-se por situação de prática aquela relacionada ao cotidiano escolar envolvendo a interação entre professores e estudantes em sala de aula durante o processo de ensino aprendizagem. Apesar de saber-se que as situações reais da prática didático-pedagógica sofrem influência de diversos aspectos alheios ao contexto de ensino (SHULMAN, 1986), há aquelas que, por ocorrerem com maior frequência, são discutidas na literatura especializada. Neste sentido, levantou-se situações de prática relacionadas ao processo de ensino aprendizagem de divisão de frações em publicações científicas, que abordassem aspectos do conhecimento matemático e do conhecimento didático, pois entende-se que “aprender a pensar e a tomar decisões acertadas diante de situações práticas problemáticas e imprevisíveis seria um dos maiores, senão o maior, objetivo da formação de professores” (DUARTE, 2010, p. 41-42).

Frente a este entendimento, elaborou-se questões que abordassem situações de prática para condução da oficina formativa de modo a permitir aos licenciandos a mobilização, ou construção, de conhecimentos especializados nos diversos subdomínios do MTSK.

Portanto, as questões baseadas em situações de prática utilizadas neste estudo foram adaptadas de Moriel Junior et al. (2017) e estão apresentadas no Apêndice C. Elas têm a característica de simular um contexto de ensino ou aprendizagem em sala de aula, descrita o mais próximo possível daquele que o licenciando em Matemática poderá vivenciar profissionalmente ou mesmo já o tenha feito. Com isso, investigador e investigados podem ter acesso aos conhecimentos especializados MTSK passíveis de serem mobilizados naquela situação.

Descrevemos algumas particularidades inerentes à oficina formativa:

- A discussão das questões tem que ser sempre o ponto de partida e os alunos devem ser envolvidos, individualmente ou em grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo para chegarem à sua resolução;
- O foco principal é a discussão que se gera ao redor da questão apresentada, procurando oportunizar ao máximo a mobilização de conhecimentos especializados;
- As resoluções discentes feitas por processos diferentes devem ser apresentadas na lousa para que todos os alunos as analisem e discutam.

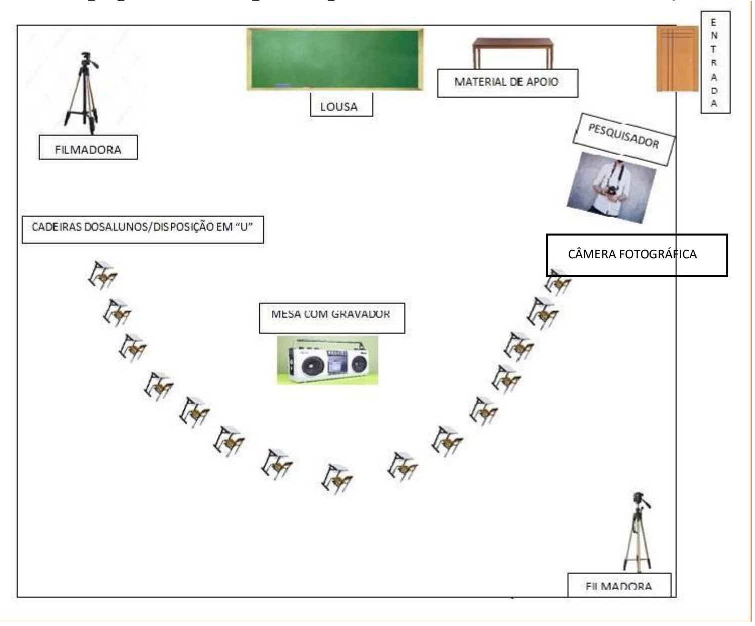
As **intervenções e as perguntas** aos participantes da pesquisa buscaram explorar e revelar o conhecimento especializado dos sujeitos em cada situação. Assim, ao apresentar questões, o investigador estimulava a discussão indagando: se coloque no papel do professor que trabalha com divisão de frações e se depara com essa situação. O que você tem a dizer sobre isso? Essa pergunta foi o fio condutor da atividade formativa e a partir desse instante o investigador buscou não responder diretamente as perguntas dos participantes sobre a correção da sua argumentação ou sobre questões pedagógicas. “Ao invés disso, ele redirecionava os questionamentos para o grupo, para outros problemas” (MORIEL JUNIOR, 2014, p. 44). Para tanto, elaborou-se, a partir da literatura especializada (MORIEL JUNIOR, 2014; MONTES, 2014; ROJAS, 2014; VASCO, 2015; FLORES MEDRANO, 2015; ESCUDERO-ÁVILA, 2015:AGUILAR, 2015), possíveis perguntas complementares a serem utilizadas para fomentar a discussão, conforme Apêndice D. Cabe destacar que a intenção é a compreensão do fenômeno, e não a avaliação dos sujeitos e de seu conhecimento.

Quanto à **validação da oficina**, A oficina formativa, antes mesmo de ser aplicada aos sujeitos da pesquisa, foi apresentada e discutida no GIMC como forma de um piloto, atividade cuja importância deve ser ressaltada, pois contribuiu significativamente para o desenvolvimento do pesquisador enquanto investigador.

Os equipamentos necessários ao pesquisador para registro da oficina formativa foram: 2 (dois) gravadores; uma máquina fotográfica, 2 (duas) filmadoras e um celular. Foi feito um teste do funcionamento dos equipamentos e procurou-se posicionar antecipadamente os equipamentos, para facilitar e ter melhor qualidade de gravação de áudio, vídeo e fotográfico.

A disposição dos equipamentos e participantes na sala durante a oficina está representada esquematicamente na Figura 4.

Figura 4 – Disposição de equipamentos e participantes na sala durante realização da oficina formativa



Fonte: Produção do próprio autor (2019).

Após a obtenção dos dados por meio de registros fotográficos e gravação audiovisual, foi realizada a transcrição para se efetuar a análise das manifestações dos sujeitos.

3.4 SOBRE A ANÁLISE DE DADOS

Após a etapa anterior de obtenção e transcrição dos dados, realizou-se uma pré-análise para a criação dos episódios a serem analisados. Um episódio corresponde a:

> [...] um fragmento da oficina que tem princípio e fim reconhecível, possui uma sequência de ações que o configura e tem um sentido completo em si mesmo (CARRILLO; ROJAS; FLORES, 2013; KRIPPENDORFF, 1990), como a execução

> de uma explicação de como ensinar um conceito, a justificação de um algoritmo etc. (MORIEL JUNIOR, 2014, p. 44).

Para analisar cada episódio, utilizou-se a técnica da análise de conteúdo, definida como técnica de análise de que permite fazer inferências, válidas e replicáveis, dos dados para o seu contexto (KRIPPENDORFF, 1990). Utilizou-se essa técnica para descrever e interpretar os conteúdos transcritos da oficina formativa com futuros professores a respeito do conhecimento especializado para ensinar e fazer aprender divisão de frações.

Em seguida, realizou-se a comparação sistemática das unidades de análise com as definições dos subdomínios do modelo teórico *Mathematics Teacher"s Specialized Knowledge* - MTSK, possibilitando explorar analiticamente tais conhecimentos e caracterizá-los (MORIEL JUNIOR; MORAL, 2017). Este modelo foi usado também como "ferramenta metodológica para exploração analítica dos conhecimentos mobilizados pelos sujeitos durante as oficinas" (MORIEL JUNIOR, 2014, p.7), o que permitiu identificar as evidências do conhecimento especializado e também seus indícios sobre o conhecimento dos subdomínios do MTSK.

Consideram-se evidências de conhecimento aqueles elementos que nos permitem afirmar que um professor tem certo conhecimento, seja profundo ou superficial, sobre determinado assunto e, normalmente, esses elementos provêm de uma triangulação para garantir sua existência (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Os indícios de conhecimento podem ser traduzidos como suspeitas (propiciadas por alguma afirmação ou ação do professor) da existência ou inexistência de um certo conhecimento, também são uma aceitação de que é necessária mais informação para se tornar evidência (ESCUDERO-ÁVILA, 2015), e podem, ainda, ser interpretados como fragmentos de informação em que parece ser percebido certo conhecimento matemático ou didático da Matemática que os sustenta e que poderia ser considerado parte da MTSK.

O indício de conhecimento não é conclusivo, então exigiria uma exploração mais profunda para se poder afirmar que o professor domina esse conhecimento. Ao investigar os indícios de conhecimento permite-se ampliar a compreensão do fenômeno investigado contribuindo assim para obter-se confiança no conhecimento identificado (MORIEL JUNIOR; CARRILLO, 2014.

Esta pesquisa, apesar de ter como foco principal, durante a oficina formativa, a identificação de evidências de conhecimentos, identificou, também, indícios de conhecimentos mobilizados pelos sujeitos, mas em função de algumas limitações não houve aprofundamento na sua exploração, das quais se destacam: (i) Para levantar os indícios haveria a necessidade que o investigador permanecesse mais alguns dias na instituição que se localiza no interior do estado de Mato Grosso, distante aproximadamente 200 km da capital Cuiabá, o que acarretaria em mais custos com hospedagem, alimentação e translado, observa-se que todos os referidos gastos foram financiados com recursos próprios do investigador (ii) Dificuldade em liberar os sujeitos das pesquisa para complementação da investigação dos indícios, visto que seria necessária a autorização expressa dos professores das disciplinas, o que impactaria na questão do planejamento das suas aulas, pois esta liberação extra não havia sido previamente acordada. Apesar de não ocorrer esse aprofundamento, não houve prejuízo à investigação em relação a coleta de dados, visto que foi se realizou o que foi proposto e, diante dessa realidade, optou-se por essa tomada de decisão.

Existem episódios que por si só não fornecem informações suficientes para falar sobre evidência ou indícios, mas que poderiam servir como ponto de partida ou referência para discorrer, futuramente, sobre algum aspecto específico do conhecimento do professor. Pode-se dizer que, em toda a investigação, surgem momentos que parecem potencialmente interessantes para aprofundar uma ideia ou explorar coisas diferentes daquelas que foram, originalmente, pensadas para a análise. Isto é o que se entende como oportunidades de pesquisa, que são de natureza distinta das evidências e indícios, pois são momentos ou situações levantadas pelo professor ou por dinâmicas de classe que servem para explorar o conhecimento de algum subdomínio, embora isso não esteja relacionado ao subdomínio com o qual a declaração levantada é identificada (ROJAS, 2014).

Na busca de não omitir possíveis contribuições na análise dos dados, foram colocados em discussão com alguns integrantes do GIMC esses episódios para análise coletiva, realizando uma triangulação de investigadores (DENZIN, 1989), uma vez que elas são colocadas em discussão e análise coletivamente o que permite detectar e corrigir vieses na análise dos dados de modo que se obteve um refinamento com as contribuições das análises dos dados deste investigador.

A triangulação de dados busca elementos que permitam afirmar que um professor possui ou não um determinado conhecimento. Geralmente eles vêm de uma triangulação para garantir a existência de tal conhecimento (AGUILAR, et al., 2013).

As evidências de conhecimentos identificados foram codificadas com a letra „**e**‟, acompanhadas de uma numeração em negrito facilitando a localização no episódio e o subdomínio MTSK ao qual pertence. Quanto aos indícios de conhecimentos utilizou-se a letra

„**i**". Tem-se como exemplo o indício de conhecimento de tópicos matemáticos, identificado na Análise 1 e codificado como: (**i1**, **KoT**).

Ao longo do texto, apresentam-se os episódios seguindo a nomenclatura adaptada de Zakaryan e Ribeiro (2017), em que constam a linha inicial e final do episódio transcrito entre colchetes, seguido do tema discutido. Por exemplo: Episódio 1 [91-138] – Discussão de um problema utilizando divisão de frações.

Para analisar os dados extraídos dos episódios da oficina utilizou-se o instrumento metodológico de análise MTSK desenvolvido por MORIEL JUNIOR (2018), conforme quadro a seguir.

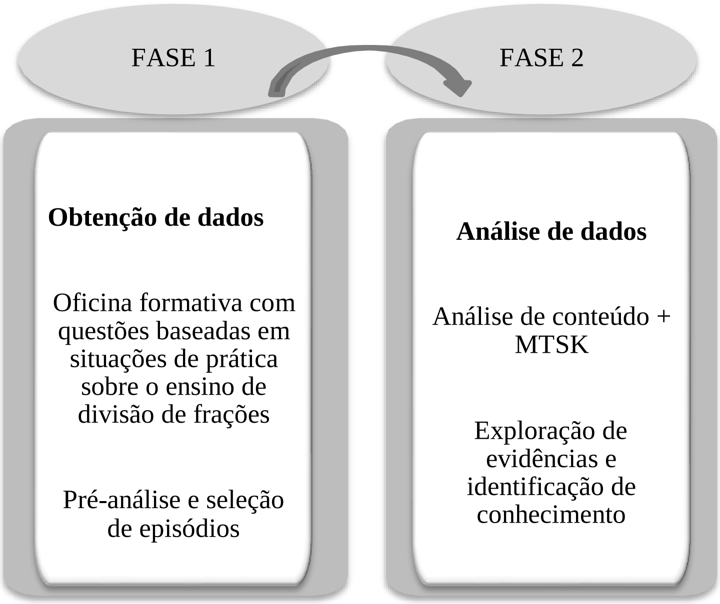
Quadro 9 – Instrumento de análise MTSK

TRECHO DO ARTIGO	**ANÁLISE DO PESQUISADOR**		
Manifestação	**Conhecimento...**	**associado a...**	**que consiste em...**
Trecho do episódio (Artigo, ano, página ou linha]	[subdomínio]	[categoria]	[Síntese do conhecimento]
[Exemplo] A implementação do material realizada em flash dificulta o processo de gravação das produções dos alunos o que levou o grupo de professores a criar, em documento do Word, denominado Caderno de Exercícios, acessado pelo aluno a partir de links. Com design atraente o Caderno contém desafios, problemas a serem resolvidos, gráficos a serem construídos no Winplot e reproduzidos no Caderno, além de locais nos quais o aluno é incentivado a explicar e justificar determinadas questões (KESSLER, 2009, p. 7)	*do ensino de matemática (KMT)*	*uma ferramenta didática*	*um material digital no formato de hipertexto contendo uma sequência de situações-problema, desafios e informações associados ao conceito de derivada e um „Caderno de exercícios", nos quais os alunos são levados a interagir e exercitar a explicação/justificação*

Fonte: MORIEL JUNIOR (2018) e MORIEL e ALENCAR (2019).

Em síntese, o encaminhamento metodológico da pesquisa envolve duas etapas e foi adaptado de MORIEL JUNIOR (2014), conforme Figura 5.

Figura 5 – Percurso metodológico da pesquisa



Fonte: Adaptado de MORIEL JUNIOR (2014).

O capítulo que ora se encerra foi estruturado para explicar o conjunto de procedimentos metodológicos organizados, a partir dos objetivos traçados, que ajudaram na investigação do problema apresentado. O capítulo que se segue trata da análise dos dados que foram levantados na pesquisa.

4 RESULTADOS

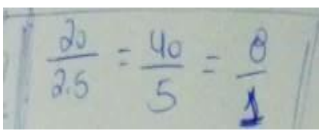
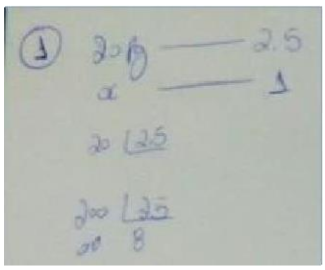
Neste capítulo, é apresentada a análise de cinco episódios em que se identificam evidências e indícios de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações mobilizados pelos licenciandos durante a oficina formativa.

Ao iniciar as atividades, o pesquisador se apresentou e solicitou que os licenciandos assim o fizessem. Em seguida, foi exposta a meta do trabalho com a oficina formativa de discutir questões baseadas em cinco situações de prática ligadas ao ensino da divisão de frações (cf. Apêndice C). O pesquisador, a cada situação de prática apresentada, solicitou que os alunos discutissem, pensassem, apresentassem soluções, apresentassem suas dúvidas e registrassem suas resoluções. Todo este processo foi registrado conforme descrito na seção anterior e a seguir, passou-se à análise dos dados e à descrição dos resultados desta pesquisa.

4.1 EPISÓDIO 1 – DISCUSSÃO DE UM PROBLEMA UTILIZANDO DIVISÃO DEFRAÇÕES

Neste episódio, procurou-se caracterizar conhecimentos especializados dos licenciandos ao lidarem com um problema sobre divisão de frações discutindo a Situação 1 (conforme transcrição do Quadro 10). Trata-se de um problema associado à interpretação da divisão de fração denominada proporção de valor unitário desconhecido (CONTRERAS, 2012) ou proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido (MORIEL JUNIOR, 2017).

Quadro 10 – Episódio 1 [91-138]: Discussão de um problema de divisão de frações

[91-94] **I**	**Situação 1**. Um professor propõe o seguinte problema em sala de aula: “Uma impressora pode imprimir 20 páginas em dois minutos e meio. Quantas páginas ela imprime por minuto?” Como você resolve esse problema utilizando divisão de frações?
[95-105]	Vocês conseguem resolver essa questão de quantas maneiras diferentes? [...] Se coloque no papel do professor que trabalha com divisão de frações e se depara com esse processo de solução. Como usar essa resolução [deste problema] para trabalhar e esquematizar a resolução de divisão de frações?
[106-109] **L6**	Dá para usar a razão e proporção [cf. registro abaixo à esquerda]. Ou regra de três [cf. registro abaixo à direta].
	 
[110-112] **I**	O que é proporção? Como você explicaria esse problema para o seu aluno? Alguém consegue enxergar como fazer uma divisão direta nesse problema? Na verdade, você fez?

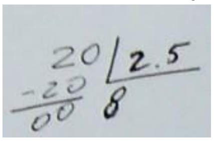
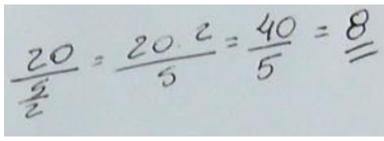
[113-114] **L6** Eu resolvi. Comparação entre duas frações

[115-120] **I** Consegue resolver por divisões com frações? Como você faria? Você fez $\frac{20}{2,5}$. E quanto se fosse a resolução por divisão de frações? Como iria proceder? Você pode registrar isso lá no quadro?

[121-124] **L6** Sim, professor. [O aluno começa a escrever na lousa] No caso, eu ia dividir 20 por 2,5. Só que como eu não posso escrever 2,5; eu coloco cinco sobre dois [$\frac{20}{\frac{5}{2}}$]. [E desenvolve a seguinte expressão na lousa:]

$$\frac{20}{2,5} = \frac{20}{\frac{5}{2}} = 20 \times \frac{2}{5} = \frac{20}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{20 \times 2}{1 \times 5} = \frac{40}{5} = 8.$$

[125-127] **L1** Resolvi de duas maneiras diferentes [Na sequência, conforme registro à esquerda, o licenciando efetuou a divisão utilizando o método da chave. E a seguir, conforme registro à direita, efetuou a divisão de fração].

[128-133] **I** Então, como vocês ensinariam isso para os seus alunos na hora que eles perguntassem? "professor, me explica essa resolução?" Agora que vocês já têm várias formas de fazer. Quais conhecimentos estão envolvidos nessa resolução?

[134] **L6** Proporção, simplificação de fração, divisão de fração, regra de três simples.

[135] **I** Como você explicaria essa divisão de fração aos seus alunos?

[136-138] **L2** Nesse caso, eles já devem saber que 5 dividido por 2 é 2,5, as séries iniciais. Ou depende de qual aluno a gente está falando. Na divisão de duas frações, conserva o numerador e inverte multiplicando o denominador.

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O primeiro conhecimento detectado no Episódio 1 é do licenciando **L6** que manifestou o conhecimento de tópicos matemáticos associado à fenomenologia (CARRILLO et al., 2014) que consiste em associar à regra de três a resolução do problema de divisão de frações do tipo proporção de valor unitário desconhecido (CONTRERAS, 2012) ou proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido (MORIEL JUNIOR, 2017) **(e1, KoT)** [cf. linhas 106-109].

O licenciando **L6** evidenciou também um conhecimento de tópicos matemáticos associado a propriedades que consiste na equivalência de frações ($\frac{20}{2,5} = \frac{40}{5} = \frac{8}{1}$) **(e2, KoT)**, por meio da qual ele obteve a solução do problema proposto [cf. linhas 106-109] ao aplicá-lo na situação de divisão de frações. Embora não tenham sido citados elementos da literatura especializada, o licenciando mobilizou a definição de frações equivalentes para resolver o problema assumindo que uma mesma quantidade, ou proporção, pode ser expressa por frações equivalentes (VERNEQUE, 2011; RIPOLL et al., 2016), apoiando-se na ideia de realizar diferentes divisões que resultam na mesma relação parte e todo (CISCAR e GARCIA, 1998; VASCONCELOS, 2007; SILVA e ALMOULD 2008).

Ainda no mesmo trecho do episódio [cf. linhas 106-109], identificou-se que o licenciando **L6** mobilizou outro conhecimento de tópicos matemáticos associado à categoria procedimentos, o qual consiste em como se faz a regra de três **(e3, KoT)**. A regra de três pode ser utilizada na resolução de situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, e ela propicia estabelecer ligações entre tópicos da Matemática, bem como, com os de outras áreas e com temas transversais (BRASIL, 1998). Neste caso, o licenciando resolveu a situação de variação diretamente proporcional entre as grandezas quantidade de páginas e tempo de impressão e associou à divisão de frações.

Ao ser indagado pelo investigador sobre como resolveria o problema utilizando divisões de frações, os licenciandos **L6** ao descrever na lousa sua resolução [cf. linhas 121-124], **L1** ao registrar sua resolução em folha [cf. linhas 125-127] e o **L2** que apenas verbalizou sua resolução [cf. linhas 136-138], evidenciaram o conhecimento de tópicos matemáticos **(e4, KoT)** associado ao procedimento do algoritmo inverter e multiplicar para dividir frações, que em sua versão generalizada é: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$. Trata-se do algoritmo mais conhecido pelos professores e futuros professores (TIROSH, 2000; NILLAS, 2003; LI, 2008; LOPES, 2008; CONTRERAS, 2012; ÖZEL, 2013; MORIEL JUNIOR, 2014).

Existe um alerta importante na literatura acerca do fato de que nas operações de multiplicação e divisão de frações, o professor se limita a ensinar os procedimentos simbólicos mediante algoritmos convencionais, e tem-se como consequência a prescrição de regras e macetes para realizar operações (LOPES, 2008), promovendo assim automatização dos algoritmos para efetuar as operações (ROJAS et al., 2015), a maioria dos quais sabe dividir frações, mas não explica o procedimento (TIROSH, 2000).

O conhecimento de tópicos matemáticos foi evidenciado pelo licenciando **L6** [cf. linhas 121-124], associado a registros de representação que consiste em dois modos de representar um número (decimal e fracionário) e a conversão entre eles ($2{,}5 = \frac{5}{2}$) **(e5, KoT)**, este conhecimento também foi manifestado pelo licenciando **L1** [cf. linhas 125-127].

A manifestação deste conhecimento é importante durante a formação docente, pois vai ao encontro de uma defasagem de aprendizagem já constatada, uma vez que alunos do 3º ano do Ensino Fundamental não compreendem as representações fracionárias e decimais dos números racionais e os procedimentos de cálculos associados a esse tipo de número, apesar destes serem conteúdos ministrados nos anos iniciais deste nível de ensino (BRASIL, 1997).

Os licenciandos **L1** [cf. linhas 125-127] e **L2** [cf. linhas 136-138] mobilizaram conhecimento de tópicos matemáticos associado a registro de representações que consiste na nomenclatura das partes da fração **(e6, KoT)**: numerador e denominador (SILVA, 2019). Outro conhecimento mobilizado pelo licenciando **L1**, foi o conhecimento de tópicos matemáticos **(e7, KoT)** associado a procedimentos que consiste no „método da divisão pela chave" (SILVA, 2019) de um inteiro por decimal [cf. linha125-127].

Identificou-se indício de conhecimento da estrutura da matemática por meio do comentário do licenciando **L6** sobre a Situação 1 [cf. linha 134] em que sugere conexão entre conteúdos como razão, proporção e regra de três simples para resolver corretamente o problema **(i1, KSM)**, em que a maioria seria conexão de simplificação por tratar-se de relação do conteúdo atual com anteriores para a resolução do problema (MONTES et al., 2013; CARRILLO et al., 2014; FLORES-MEDRANO et al., 2014; ROJAS, 2014; MONTES; CLIMENT, 2016).

Identificou-se o indício de conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática, associado a nível de desenvolvimento conceitual esperado, que consiste em o aluno das séries iniciais saber que 5 dividido por 2 é 2,5 **(i2, KMLS),** pelo fato do licenciando **L2** verbalizar que a divisão de um número inteiro por um decimal deve ser ensinado nas séries iniciais [cf. linhas 136-138]. Porém não citou quais etapas escolares, mas mobilizou indícios de conhecimento de conteúdos que devem ser ensinados nas respectivas séries escolares e a sequenciação de conteúdos. Percebe-se que o licenciando **L2**, apesar da descrição limitada, focalizou, mesmo sem explicitar uma fundamentação, a expectativa de aprendizagem em função da sequenciação de conteúdo, ao considerar o conhecimento prévio dos alunos (MORIEL JUNIOR, 2014).

Apresenta-se, a seguir, com o objetivo de sistematizar os resultados, o Quadro 11 referente às manifestações dos sujeitos e análise MTSK do pesquisador durante discussão por parte dos licenciandos em Matemática de um problema de divisão de frações.

Quadro 11 – Manifestação do sujeito e análise MTSK do pesquisador: Discussão de um problema de divisão de frações

TRECHO DA TRANSCRIÇÃO	ANÁLISE DO PESQUISADOR		
Evidência/ Indício	Conhecimento...	associado a...	que consiste em...
[133] I quais conhecimentos estão envolvidos nessa resolução? **[134] L6** regra de três simples, proporção, simplificação de fração, divisão de fração.	da estrutura matemática da (indício1, KSM)	Conexões de simplificação	relacionar conteúdos ensinados, como regra de três simples com conteúdos anteriores, proporção e simplificação de frações
[136-137] L2 Nesse caso, eles já devem saber que 5 dividido por 2 é 2,5, as séries iniciais ou depende de qual aluno a gente está falando.	dos parâmetros da aprendizagem de matemática (indício2, KMLS)	Nível de desenvolvimento conceitual esperado	Se espera que o aluno das séries iniciais saber que 5 dividido por dois é 2,5.
[136-138] L2 Na divisão de duas frações, conserva o numerador e inverte multiplicando o denominador.	de tópicos matemáticos (evidência 6, KoT)	Definições	nomenclatura das partes da fração: numerador e denominador.
	de tópicos matemáticos (evidência4, KoT)	Procedimentos	o algoritmo inverter e multiplicar para a dividir de frações

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O quadro a seguir sintetiza os conhecimentos mobilizados neste episódio.

Quadro 12 – Síntese dos conhecimentos mobilizados: Discussão de um problema de divisão de frações

EVIDÊNCIA DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
1. Fenomenologia, ao associar à regra de três a resolução do problema em questão do tipo proporção (entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido).	KoT	L6
2. uma propriedade de frações: equivalência de frações, $\frac{20}{2,5} = \frac{40}{5} = \frac{8}{1}$.	KoT	L6
3. Procedimento de Aplicação da Regra de três na divisão de frações	KoT	L6
4. Procedimento do algoritmo inverter e multiplicar para a dividir de frações	KoT	L1, L2, L6
5. Registro de representação, dois modos de representar um número e a conversão entre eles: da forma decimal (2,5) para fração ($\frac{5}{2}$).	KoT	L6 e L1
6. nomenclatura das partes da fração: numerador e denominador	KoT	L1 e L2
7. Método de divisão de um número inteiro por um decimal pela chave.	KoT	L1

INDÍCIOS DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
1. Conexão de simplificação ao relacionar conteúdos ensinados com conteúdos anteriores, como razão, proporção e regra de três simples para resolver corretamente o problema.	KSM	L6
2. Nível de desenvolvimento conceitual esperado que consiste em o aluno das séries iniciais saber que 5 dividido por dois é 2,5, trata-se de conhecimento relativo a sequenciação de diversos tópicos considerando conhecimento prévio dos alunos ou as capacidades a serem desenvolvidas.	KMLS	L2

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

Neste episódio percebe-se que a atividade baseada na Situação 1 levou os licenciandos a mobilizarem os conceitos de equivalência de frações, regra de três, algoritmo inverter-e-multiplicar, conversão de representação de fração em forma decimal e divisão de um número inteiro por um número decimal pelo método da chave. Trata-se do conhecimento de tópicos matemáticos (KoT), típico de professores de Matemática e seu trabalho docente. Constatou-se que os licenciandos **L1**, **L2** e **L6** manifestaram as categorias: procedimentos, definições; propriedades, procedimentos, registros de representação; fenomenologia. Importante destacar que, na análise desse Episódio, foram identificados nove conhecimentos mobilizados dentre os quais sete foram do KoT.

Estes resultados mostram que apesar da literatura destacar dificuldade docente na resolução de problemas que envolvem frações, como erros ao trabalhar com números fracionários e suas operações ou, ainda, falta de estratégias de solução ao resolverem problemas contextualizados (BERTONI, 2008; BAYOUD, 2011), foi mobilizada uma diversidade de resoluções para a situação proposta, mesmo com alguma dificuldade inicial dos sujeitos. Os licenciados **L1**, **L2** e **L6** resolveram a Situação 1 utilizando o algoritmo tradicional inverter e multiplicar, regra de três, equivalência de frações e o método da chave.

Assim observa-se que a oficina formativa contribuiu com o desenvolvimento do conhecimento especializado ao abordar temas que são apontados como limitações referentes ao ensino e à aprendizagem de divisão de frações por BERTONI (2008) e BAYOUD (2011). Esta construção de conhecimento deu-se em um contexto formativo, no qual discutiu-se com os licenciandos em Matemática uma questão de prática para investigar o conhecimento mobilizado por eles, a construção de conhecimento pode ser observada, no licenciando **L6** que inicialmente não propõem uma resolução que inclua a divisão de frações, porém ao ser estimulado pelo investigador apresenta como esquematizar a solução para trabalhar a divisão de frações.

4.2 Episódio 2 – Discussão sobre erros comuns dos alunos

Terminada a discussão da Situação 1, foi apresentada aos licenciandos a Situação 2 (extraída de MORIEL JUNIOR et al., 2017) cujo objetivo é a discussão de um erro cometido comumente por alunos ao resolverem uma divisão de frações (cf. Quadro 13). Trata-se da simulação de um contexto de aula em que o professor necessita conhecer e saber lidar com os diferentes tipos de erros comuns cometidos por estudantes ao lidarem com a divisão de frações (TIROSH, 2000; ASHLOCK, 2006; NEWTON, 2008; REDMOND, 2009; BAYOUD, 2011; MORIEL JUNIOR, 2014).

Quadro 13 – Episódio 2 [173-206]: Discussão de erro comum de alunos

[173-176] **I**	**Situação 2.** Se coloque no papel de um professor trabalhando divisão de frações em sala de aula que se depara com os seguintes processos de resolução de alunos: Como você avalia esta resolução? RESOLUÇÃO A: $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$
[177] **L4**	Está errada.
[178] **L2**	Está certa .
[179 **L4**	Para mim não.
[180] **L1**	Eu acho que não está certa.
[181] **L**	Ele dividiu o de cima e só repetiu o de baixo de cima.
[182] **L6**	Eu acho que está correta.
[183] **I**	Por que você acha que esta que seu colega falou que a resolução está errada?
[184] **L1**	Ele conservou a parte de baixo e em cima ele esqueceu de somar.
[185] **I**	Somar?
[186] **L2**	Não é soma , é divisão.
[187] **L13**	Está certo.
[188] **L7**	Ele conservou a parte de baixo e dividiu a parte de cima.
[189] **L7**	Está errado.
[190] **L2**	Está errado não.
[191] **L4**	Está errado porque ele não multiplicou pelo inverso.
[192] **L2**	Se você pegar e multiplicar pelo inverso e ou quatro extremos vai dar o mesmo resultado.
[193-196] **L6**	Vai dar 3 o resultado. Se você pegar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda, vai dar 90/30 e cancelando o zero fica 9/3 que vai dar 3, veja minha resolução. $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{90}{30} = 3$ //
[197-199] **I**	Vocês todos concordam que essa resolução está incorreta? Então, qual o erro que o aluno cometeu? Você consegue ver o erro?
[200] **L6**	Conservou-se o denominador.
[201] **I**	Você está convencida ?
[202] **L2**	Agora já observei o que está errado.
[203] **I**	O que o aluno errou então?
[204-205] **L3**	O aluno cometeu um erro: conservou o denominador e dividiu o numerador, ele poderia multiplicar cruzado as frações

[206] **L1**	Não multiplicou pelo inverso.	

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

A manifestação dos licenciandos **L4** e **L1** sugerem que o erro do aluno é não utilizar o algoritmo padrão da divisão de frações, inverter e multiplicar, entretanto considerou-se que isto consiste em um indício de conhecimento **(i3, KFLM)**, pois esses licenciandos não evidenciam o padrão de erro cometido na Situação abordada ao dividir frações: dividir numeradores entre si e conservar os denominadores [cf. linhas 191 e 206]. Isto se configura como uma oportunidade de seguir investigando aspectos do conhecimento especializado dos futuros professores de Matemática (FLORES; ESCUDERO; AGUILAR, 2013), a qual não foi aproveitada.

O licenciado **L6** mobilizou o conhecimento de tópicos matemáticos, associado a procedimentos ao resolver o problema ao comentar sua resolução e representando sua resolução na lousa [cf. linhas 193-196], que consistem o algoritmo: inverter e multiplicar **(e4, KoT)** cuja análise foi realizada no Episódio 1.

O licenciando **L3** ao comentar que o aluno „conservou o denominador e dividiu o numerador, [sendo que o aluno] poderia multiplicar cruzado as frações‟ [cf. linhas 204-205] evidencia o conhecimento associado a categoria fortalezas e dificuldades de aprendizagem de matemática que consiste em um erro comum de alunos ao dividir frações: dividir numeradores entre si e conservar os denominadores **(e8, KFLM**).

Estes erros, identificados por parte dos licenciandos, são apontados na literatura especializada e nas avaliações nacionais (BERTONI, 2008, BAYOUD, 2011). Pode-se citar como erros comuns ao resolver divisão de frações cometidos por alunos (e muitas vezes também por professores) como manter denominadores quando são iguais, cancelar ou dividir em cruz (NEWTON, 2008), inverter o dividendo ao invés do divisor (ASHLOCK, 2006; REDMOND, 2009; BAYOUD, 2011) ou considerar errado o algoritmo da divisão de numeradores e denominadores entre si (TIROSH, 2000).

O conhecimento sobre os erros comuns dos estudantes, obstáculos de aprendizado, assim como as dificuldades relacionadas aos processos de aprendizagem compõem a categoria Forças e dificuldades do KFLM (ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016).

Neste contexto, foi abordado o erro por parte dos licenciandos na Resolução A, pois alguns afirmaram que esta era correta e outros não. No desenrolar do debate todos foram convencidos que a resolução era incorreta. Este embate de ideias levou à consideração de que, assim como ocorrera com alguns dos licenciandos, os alunos poderiam cometer este mesmo erro, o que o caracterizaria como comum, ou seja, ao fazer uma divisão de frações com o mesmo denominador, repetir o denominador e dividir os numeradores (NEWTON, 2008; REDMOND, 2009).

Os tipos de erros cometidos pelos alunos devem ser distinguidos pelos professores, fornecendo-lhes condições de superá-los e que essas condições (que se referem aos métodos, técnicas e procedimentos de ensino) devem ser selecionadas adequadamente, em função da avaliação que se faz da natureza dos erros de aprendizagem (DAVIS; ESPOSITO, 1990). Por exemplo, ao invés de apenas alertar os alunos sobre os erros, os professores poderiam utilizá-los como catalisadores para aprender, como meios efetivos de instrução (ASHLOCK, 2006). Atitudes neste sentido podem representar oportunidades de aprendizagem para os alunos. Esta atitude positiva frente ao erro do aluno pode ser ensinada nos programas de formação inicial, de modo a familiarizar os futuros professores com vários tipos comuns de processos cognitivos e, por vezes, errôneos, pois alguns desses futuros professores desconhecem as principais fontes de respostas incorretas dos alunos (TIROSH, 2000).

Continuando a análise, a manifestação do licenciando **L3** [cf. linhas 204-205] reforça a evidência de conhecimento de tópicos matemáticos (KoT), identificada anteriormente **(e6, KoT)** a respeito de registros de representações que consiste na nomenclatura das partes de frações (numerador e denominador)**.**

O licenciando **L3** ao afirmar [cf. linhas 204-205] que o aluno poderia multiplicar cruzado as frações, demonstrou, portanto, indício de conhecimento especializado, associado ao procedimento de como dividir frações que consiste no algoritmo "produtos cruzados" (**i4, KoT)**, generalizado, conforme Figura 6:

Figura 6 – Algoritmo "produtos cruzados"

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Fonte: Contreras (2012, p. 49)

Ainda durante a discussão da Situação 2 alguns licenciandos afirmaram que a Resolução A estaria correta, o que significa que cometeriam o mesmo erro apresentado na resolução. Porém, ao longo da oficina, modificaram suas opiniões, o que reforça que os erros comuns tanto podem ser cometidos por alunos como por professores e que a Situação 2 consistiu em uma oportunidade para construção de conhecimento especializado tanto para a identificação de um erro comum como para a abordagem construtiva de um erro inicial.

Apresenta-se, a seguir, o Quadro 14, referente à Manifestação do sujeito e à análise MTSK do pesquisador na discussão por parte dos licenciandos em Matemática sobre erros comuns cometidos por alunos**.**

Quadro 14 – Manifestação do sujeito e análise MTSK do pesquisador: Discussão de erros comuns dos alunos

TRECHO DA TRANSCRIÇÃO	ANÁLISE DO PESQUISADOR		
Evidência/Indício	Conhecimento...	associado a...	que consiste em ...
[191] L4 Está errado porque ele não multiplicou pelo inverso.	de características da aprendizagem de matemática (indício3, KFLM)	Fortalezas e dificuldades	um erro comum de alunos ao dividir frações: dividir numeradores entre si e conservar os denominadores
[193-196] L6 Se você pegar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda, vai dar $\frac{90}{30}$ e cancelando o zero fica $\frac{9}{3}$ que vai dar 3, veja minha resolução:	de tópicos matemáticos (evidência4, KoT)	Procedimentos	o algoritmo: inverter e multiplicar para dividir frações
[204-205] L3 O aluno cometeu um erro: conservou o denominador e dividiu o numerador, ele poderia multiplicar cruzado as frações	de características da aprendizagem de matemática (evidência8, KFLM)	Fortalezas e dificuldades	um erro comum de alunos ao dividir frações: dividir os numeradores e conservar o denominador
	de tópicos matemáticos (evidência6, KoT)	Registros de representação	termos das partes da de frações: numerador e denominador
	de tópicos matemáticos (indício4, KoT)	Procedimentos	algoritmo “produtos cruzados” para dividir frações.
[206] L1 Não multiplicou pelo inverso	de características da aprendizagem de matemática (indício3, KFLM)	Fortalezas e dificuldades	um erro comum de alunos ao dividir frações: dividir numeradores entre si e conservar os denominadores

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O Quadro 15 sintetiza os conhecimentos mobilizados neste episódio.

Quadro 15 – Síntese dos conhecimentos mobilizados: Discussão de erros comuns dos alunos

EVIDÊNCIA DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
8. um erro comum de alunos ao dividir frações	KFLM	L3
9. algoritmo inverter e multiplicar para dividir frações	KoT	L6
10. identificar os termos matemáticos da divisão de frações: numerador e denominador	KoT	L3
INDÍCIOS DE CONHECIMENTO DE ...	**SUBDOMÍNIO MTSK**	**SUJEITOS**
3. um erro comum de alunos ao dividir frações: dividir numeradores entre si e conservar os denominadores	KFLM	L4 e L1
4. algoritmo “produtos cruzados” para dividir frações.	KoT	L3

Fonte: **Produção do próprio autor (2019).**

4.3 Episódio 3 – Planejamento de aula sobre divisão de frações e recursos materiais utilizados

Concluídos os debates da Situação 2, apresentou-se ao grupo a Situação 3 que consiste no investigador propor ao grupo um debate sobre os aspectos relevantes na preparação de uma aula sobre divisão de frações. Esta situação teve como foco abordar a intencionalidade de um professor ao ensinar um determinado conteúdo, do seu conhecimento de exemplos e tarefas que possam ser dadas aos alunos e promovam a aprendizagem desse conteúdo (FLORES-MEDRANO et al., 2015). O episódio (cf. Quadro 16) apresenta uma diversidade de abordagens sugeridas pelos licenciandos, a partir das quais se buscou identificar conhecimentos.

Quadro 16 – Episódio 3 [697-718]: Planejamento de aula sobre divisão de frações e recursos materiais utilizados

[697-698] **I.**	**Situação 3.** Um professor ao preparar sua aula sobre divisão de frações, o que deve ser relevante?
[699-704**] L6**	Se eu sou um professor que frequento aquela sala ali, eu vou saber a dificuldade da turma. Então eu sei aonde tem que começar a aprender divisão. Por exemplo, esses alunos têm dificuldade em multiplicação. E para eu trabalhar frações com eles eu tenho que trabalhar multiplicação novamente. Depois da multiplicação, buscar algo que ligue a frações, que mostre para ele. **“**Lembra disso aqui? A gente trabalhou assim, e é a mesma coisa”, nesse sentido.
[705-707] **L1**	Eu acho que no primeiro dia já ter uma dinâmica. Já explicaria a fração como uma brincadeira. Porque é crianças. Então eles vão entender, algo assim, levar uma pizza. Levar uma pizza não. Levar uma dinâmica, que eles brincam e entendem
[708-714] **L3**	Igual aconteceu semana passada. Eu falava da fração, mas meus alunos não entendiam o que eu estava explicando. Aí eu tive que utilizar um copo de medida para explicar a quantidade da fração que tinha ali. Ou seja, um litro, dois litros, trezentos ml, porque era o único jeito deles conseguirem entender. Aí tinha uma menina que era bem esperta, mas estava com bastante dificuldade. Ela ficava o tempo todo “eu não to entendendo”. Aí eu

	saí da sala, o Marcelo viu, eu levei um copo de medida para poder explicar. Era o único jeito de visualizar.
[715-718] **L6**	Só o que **L5** falou, de revisar a multiplicação e a divisão, trabalhar de uma forma geométrica a ideia de fração, sem trabalhar diretamente com a divisão. No caso pode pegar uma barra, no caso ela utilizou o copo e mostra que a fração nada mais é que a divisão de partes. A partir daí dar continuidade no conteúdo.

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

Na fala do licenciando **L6** [cf. 699-704] identificou-se a manifestação de indício de conhecimento das características da aprendizagem de matemática, associado às fortalezas e dificuldades dos estudantes que consiste no relato do licenciando sobre a necessidade de saber a dificuldade da turma **(i5, KFLM),** observando-se que esta análise foi baseada conforme referencial em **(e8, KFLM)** . Porém, como não houve maior detalhamento por parte do licenciando sobre quais seriam estas dificuldades, não foi possível caracterizar a mobilização de conhecimento.

Identificou-se também indício de conhecimento do ensino de matemática, associado a estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático que consiste no uso de „copo de medida‟ ou „barra‟, descrito pelo licenciando **L6** [cf. linhas 715-718], onde menciona esses materiais para ensinar frações: „No caso pode pegar uma barra, no caso ela utilizou o copo e mostra que a fração nada mais é que a divisão de partes, a partir daí dar continuidade no conteúdo‟ **(i6, KMT).**

O licenciando **L1** mencionou o uso de estratégias de ensino [cf. linhas 705-707], mas não houve um aprofundamento na sua explicação. Isto foi caracterizado como indício de conhecimento associado a estratégias, técnicas e tarefas para ensinar divisão de frações **(i7, KMT)**, que consiste em abordagens de ensino baseada na ludicidade („brincadeira‟) ou no uso/representação de materiais concretos („pizza‟). Neste domínio, o licenciando **L3** [cf. linhas 708-714] mobilizou conhecimento do ensino de matemática (KMT) que consiste em uma abordagem utilizando um „copo de medida‟ como recurso material para explicar o conteúdo de fração **(e9, KMT)**.

Percebe-se que os licenciandos **L1**, **L3** e **L6** utilizaram o potencial de exemplos contextuais para criar um ambiente de significado para introduzir a definição formal de um conceito. Assim, ao explorarem a potencialidade do exemplo, como um meio de destacar ou enfatizar os aspectos singulares do conteúdo matemático que deve ser ensinado, souberam criar, propor e explorar situações-problema para que os alunos pudessem construir significado para o conteúdo matemático ensinado (FLORES MEDRANO, 2015).

É essencial que os professores conheçam as ferramentas que estão disponíveis para lidar com o conteúdo, o seu potencial, suas limitações e as implicações do uso como um meio para apresentar um conteúdo matemático (ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016). E neste episódio, constatou-se que os licenciandos valem-se de materiais e estratégias para ensinar os alunos. Estes incluem recursos físicos, como materiais concretos adequados para ensinar a divisão de frações, os exemplos identificados foram barras, copos e pizza.

O uso destes recursos facilita a aquisição de conceitos por parte dos alunos, pois o trabalho com materiais concretos facilita a elaboração de raciocínios lógico matemáticos. Isto significa que os conceitos matemáticos devem ser aprendidos com apoio de modelos concretos e simbólicos (VALE, 2002). A apresentação do conteúdo matemático com uso de estratégias de ensino que facilitam a compreensão do aluno é um conhecimento especializado de professores de matemática.

Apresenta-se, a seguir, o Quadro 17, referente à Manifestação do sujeito e à análise MTSK do pesquisador na discussão por parte dos licenciandos em Matemática sobre planejamento e recursos materiais que eles utilizaram em sala de aula durante atividades acadêmicas de estágio supervisionado e substituições.

Quadro 17 – Manifestação do sujeito e análise MTSK do pesquisador: Planejamento e recursos materiais

TRECHO DA TRANSCRIÇÃO	ANÁLISE DO PESQUISADOR		
Evidência/Indício	Conhecimento...	associado a...	que consiste em ...
[699 -704] L6: Se eu sou um professor que frequento aquela sala ali, eu vou saber a dificuldade da turma. Então eu sei aonde tem que começar a aprender divisão. Por exemplo, esses alunos têm dificuldade em multiplicação. E para eu trabalhar frações com eles eu tenho que trabalhar multiplicação novamente. Depois da multiplicação, buscar algo que ligue a frações, que mostre para ele. “Lembra disso aqui? A gente trabalhou assim, e é a mesma coisa.” nesse sentido.	de características da aprendizagem de matemática (indício5, KFLM)	Fortalezas e dificuldades	Dificuldades associadas à aprendizagem correspondente ao conteúdo matemático
[705 – 707] L1 Eu acho que no primeiro dia já ter uma dinâmica. Já explicaria a fração como uma brincadeira. Porque é crianças. Então eles vão entender, algo assim, levar uma pizza. Levar uma pizza não. Levar uma dinâmica, que eles brincam e entendem	do ensino da matemática (indício7, KMT)	Estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático	abordagens de ensino baseada na ludicidade („brincadeira‟) ou no uso / representação de materiais concretos („pizza‟).

[708 – 714] L3 Igual aconteceu semana passada. Eu falava da fração, mas meus alunos não entendiam o que eu estava explicando. Aí eu tive que utilizar um copo de medida para explicar a quantidade da fração que tinha ali. Ou seja, um litro, dois litros, trezentos ml, porque era o único jeito deles conseguirem entender. Aí tinha uma menina que era bem esperta, mas estava com bastante dificuldade. Ela ficava o tempo todo "eu não to entendendo". Aí eu saí da sala, o Marcelo viu, eu levei um copo de medida para poder explicar. Era o único jeito de visualizar.	do ensino da matemática (evidência 11, KMT)	Estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático	Abordagem de ensino baseado em lúdico ou concreto: "copo de medida"
[715 – 718] L6 Só o que **L5** falou, de revisar a multiplicação e a divisão, trabalhar de uma forma geométrica a ideia de fração, sem trabalhar diretamente com a divisão. No caso pode pegar uma barra, no caso ela utilizou o copo e mostra que a fração nada mais é que a divisão de partes. A partir daí dar continuidade no conteúdo**.**	do ensino da matemática (indício 6, KMT)	Estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático	Abordagem de ensino baseado em lúdico ou concreto: „copo de medida ou barra‟

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O quadro a seguir sintetiza os conhecimentos mobilizados neste episódio.

Quadro 18 – Síntese dos conhecimentos mobilizados: Planejamento e recursos materiais

EVIDÊNCIA DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
11. Conhecimento de estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático	KMT	L3
INDÍCIOS DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
5. Saber das dificuldades associadas à aprendizagem correspondente ao conteúdo matemático	KFLM	L6
6. Conhecimento de estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático	KMT	L1
7. Conhecimentos de estratégias, técnicas e tarefas para ensinar	KMT	L6

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

No decorrer dos debates sobre a preparação de uma aula para ensinar divisão de frações, os licenciandos citaram o uso de recursos concretos para facilitar o processo de aprendizagem dos estudantes, aspecto de fundamental importância no ensino e aprendizagem da Matemática, pois o aluno aprende a relacionar a parte teórica com a prática. O reconhecimento das dificuldades dos alunos e a busca por uma estratégia para obter a melhor compreensão foi evidenciada nas falas dos licenciandos neste episódio e deixa clara a preocupação destes em conhecer as dificuldades dos alunos.

Os licenciandos, ao tecerem comentários, não estavam se baseando em algum conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos, mas sim, em seu próprio conhecimento matemático.

4.4 EPISÓDIO 4 – DISCUSSÃO SOBRE RECURSOS DIDÁTICOS

Nesse episódio, o investigador pergunta aos licenciandos sobre recursos didáticos para ensinar Matemática e surgem algumas considerações (cf. Quadro 19), nas quais foram identificados três indícios e uma evidência de conhecimento discutidos a seguir.

Quadro 19 – Episódio 4 [732-848]: Discussão sobre recursos didáticos

[730-731] **I**	Vocês viram [ao longo do curso] algum método, estratégica, recursos materiais, tecnologia para ensino de divisão de frações?
[732-734] **L3**	E o que é muito utilizado é o livro do Dante. Aí eu acho que era escola municipal, utilizava Moura, não sei se é assim que fala o sobrenome dela, que é mais tecnologia. Tanto que no livro dela tinha de utilizar Excel, tudo relacionado a informática.
[735-739] **L2**	Os livros de hoje têm menos informação no sentido de deixar a autonomia para o professor, só dar os tópicos, tem que seguir a ordem, no caso do “hoje em dia”, acho que é “matemática hoje em dia” que é utilizado, mas ele tem alguns experimentos que você pode fazer durante a aula. Só que também, devido ao tempo, nem tudo que você planeja dá tempo, e os alunos também que não são muito comportados.
[740-837]	[Comentários dos alunos sobre o curso de licenciatura em Matemática e discussão sobre algumas disciplinas específicas que não abordam conteúdo do ensino fundamental e médio concentrando-se em temas do nível superior. Os licenciandos questionaram a ausência de contextualização dos tópicos durante as aulas, afirmando terem dificuldade em entender a aplicação de teorias do Cálculo como, por exemplo, limites, derivadas e integrais. Também foram explanadas dificuldades de ordem pessoal dos licenciandos para dedicarem-se exclusivamente aos estudos por precisarem dividir seu tempo com suas atividades profissionais.]
[838-839] **L2**	Teve um que eu vi na internet, só que eu não lembro o nome dele. A professora passou para a gente.
[840-841] **L6**	Enigma das frações. Com este jogo, seus alunos vão refletir sobre os diferentes conceitos de fração.
[842-844] **L2**	Enigma das frações; estava na internet. Ia aparecendo as perguntas, tinha que resolver a fração rapidão, porque acontecia alguma coisa se a gente demorasse e se a gente errasse.
[845] **I**	Você aplicaria esse nas suas aulas com a estratégia de ensino?
[846-848] **L2**	Eu aplicaria. Mas antes de aplicar eu teria que analisar todo um contexto. Porque tem aluno que você leva e desvia o foco, apesar de que achei aquele ali muito atrativo. Então depende porque tem que ter todo um planejamento.

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

Neste episódio, o licenciando **L3** cita o nome de dois autores de livros didáticos de Matemática: Dante e Moura. Quanto ao último, o licenciando tece mais comentários, pois trabalhou com o livro, e considera seus métodos adequados para ensinar Matemática, pois em sua opinião, os conteúdos são contextualizados e tem aplicações de informática, como Excel.

O livro ao qual ele provavelmente se referiu (MOURA, 2016), que traz em sua apresentação algumas indagações sobre como a Matemática foi produzida, como deve ser estudada e como deve ser sistematizada. Identificou-se, portanto, conhecimento do ensino de matemática que o licenciando **L3** manifestou [cf. linhas 732-734], associado a recursos materiais que consiste em materiais de apoio ao ensino (dois livros didáticos) e suas características (aplicações utilizando tecnologia) **(e10, KMT)**.

Os licenciandos **L2** [cf. Linha 838] e **L6** [cf. Linha 844] citaram que conhecem um aplicativo denominado Enigma das frações, que aborda os conceitos e as operações com frações através da internet[5]. Assim os futuros professores conhecem uma estratégia que, com uso de instrumento tecnológico, visa desenvolver enredos que facilitem a aquisição de conceitos e procedimentos por parte dos alunos, estimulando-os a reflexão sobre os diferentes conceitos de fração para superação de erros e dificuldades (ROJAS, 2014).

Desta forma mobilizaram conhecimento do ensino de matemática, associado a recursos materiais e virtuais, falando de um jogo que consiste em uma ferramenta virtual para ensinar as quatro operações com frações, inclusive a divisão de frações: jogo *on line* de perguntas e desafios chamado Enigma das frações **(e11, KMT)**. O jogo foi acessado e foi possível observar que este proporciona desafios, sendo um jogo *on line* interessante e potencialmente capaz de motivar os alunos a aprender brincando.

Ao serem indagados pelo pesquisador se aplicariam esse recurso nas suas aulas como estratégia de ensino, o licenciando **L2** respondeu positivamente [cf. Linhas 846-848] ressalvando que antes deveria ser analisado *„todo um contexto" associado ao aluno*, pois considera o recurso muito atrativo e afirma que o uso de jogos educativos *on line* envolve um planejamento prévio à aula. Ao falar do ensino justificando com aspectos do aluno, o licenciando indica a manifestação implícita de algum conhecimento de características de aprendizagem do aluno **(i8, KFLM)**, cuja interferência fica clara no planejamento e na adoção do recurso didático em sala de aula (jogo Enigma de frações) descrito em **(e13, KMT)**. Logo, percebe-se uma conexão entre dois subdomínios didáticos do MTSK, em que foram envolvidos diferentes conhecimentos, com distintos focos (um no ensino, outro nas características de aprendizagem) e ao serem interconectados (FLORES et al., 2014)) caminharam no sentido do êxito do processo educativo.

[5] Disponível em https://novaescola.org.br/conteudo/4846/o-enigma-das-fracoes

Apresenta-se, a seguir, o Quadro 20, referente à Manifestação dos sujeitos e análise MTSK do pesquisador na discussão por parte dos licenciandos em Matemática sobre recursos didáticos para ensinar divisão de frações.

Quadro 20 – Manifestação do sujeito e análise MTSK do pesquisador: Discussão sobre recursos didáticos

TRECHO DA TRANSCRIÇÃO	ANÁLISE DO PESQUISADOR		
Evidência/Indício	Conhecimento...	associado a...	que consiste em ...
[732-734] L3 E o que é muito utilizado é o livro do Dante. Aí eu acho que era escola municipal, utilizava da Moura, não sei se é assim que fala o sobrenome dela, que é mais tecnologia. Tanto que no livro tinha como utilizar Excel, e trabalha com assuntos relacionados a informática.	do ensino de matemática (evidência 12, KMT)	Recursos materiais e virtuais	materiais de apoio ao ensino (dois livros didáticos) e suas características (aplicações utilizando tecnologia)
[840-841] L6 Enigma das frações. Com este jogo, seus alunos vão refletir sobre os diferentes conceitos de fração**.** **[842-844] L2** Enigma das frações; estava na internet. Ia aparecendo as perguntas, tinha que resolver a fração rapidão, porque acontecia alguma coisa se a gente demorasse e se a gente errasse.	do ensino de matemática (evidência13, KMT)	Recursos materiais e virtuais	um recurso virtual para ensinar frações: jogo da internet chamado enigma das frações, em que aparece perguntas e desafios.
[846 -848] L2 Eu aplicaria [nas minhas aulas como estratégia de ensino]. Mas antes de aplicar eu teria que analisar todo um contexto. Porque tem aluno que você leva e desvia o foco, apesar de que achei aquele ali muito atrativo. Então depende porque tem que ter todo um planejamento.	do ensino de matemática (indício8, KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	planejamento de atividades de ensino.

Fonte: **Produção do próprio autor (2019).**

O quadro a seguir sintetiza os conhecimentos mobilizados neste episódio, no qual não se identificaram evidências de conhecimentos.

Quadro 21 – Síntese dos conhecimentos mobilizados: Discussão sobre recursos didáticos

EVIDÊNCIA DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
12. Reconhecer como materiais de apoio ao ensino (dois livros didáticos) e suas características (aplicações utilizando tecnologia)	KMT	L3
13. Um recurso virtual para ensinar frações: jogo *on line* chamado enigma das frações, em que aparecem perguntas e desafios.	KMT	L2 e L6

INDÍCIOS DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
8. influência da socialização de resolução de problemas matemáticos em ambiente virtual no contexto e na concentração dos alunos no planejamento	KMT Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos **(i8, KFLM)**	L2

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

Neste episódio, o foco foi o conhecimento específico do professor de Matemática que faz a integração da Matemática e seu ensino no tocante às estratégias instrucionais. Estas são associadas a tópicos específicos para os quais são desenvolvidos materiais e recursos que facilitam a aquisição de conceitos, como conhecimentos teóricos sobre o ensino da Matemática, tais como a Teoria do Espaço de Trabalho Matemático (KUZNIAK, 2011). Este é um conhecimento que permite ao professor escolher uma representação ou material para facilitar a aprendizagem de um conceito ou um procedimento matemático.

Este conhecimento permite selecionar alguns exemplos ou uma tarefa matemática, assim como escolher um livro de texto. Na oficina formativa, os licenciandos abordaram como opções de recursos para ensino da divisão de frações o livro didático e o jogo *on-line* „Enigma das frações‟. Estes recursos podem ser importantes para a melhoria da qualidade do ensino (CARRILLO et al., 2014).

4.5 Episódio 5 – Recomendações Curriculares

Este episódio é centrado nos parâmetros da aprendizagem matemática e se inicia quando o investigador propõe o debate sobre as matrizes curriculares e suas orientações para o ensino de Matemática (cf. Quadro 22).

Quadro 22 – Episódio 5 [794-805]: Parâmetros Curriculares

[794-795] **I**	**Situação 5.** Você conhece as matrizes curriculares da Matemática? Comente sobre ela ressaltando a sua orientação sobre o ensino da Matemática
[796] **L2**	Esse currículo se refere ao PCN ou é outra coisa?
[797] **I**	É, o currículo escolar, da própria escola, que faz parte do PCN, PPP da escola.
[798] **L3**	É o que é baseado nas aulas, PCN.
[799] **I**	Você falou do PCN e PPP. Onde você viu esses planos? Você conhece?
[800-801] **L5**	Acho que foi no estágio 1 que teve que ler o PCN e o PPP da escola e fazer um relatório sobre ele. Só que o PPP estava desatualizado e precisava ser atualizado.
[802-805] **L2**	O PPP e o Plano Curricular quando eu entrei para o PIBID, era um tripé, e era um critério você ler os dois e ter conhecimento, porque a gente já estava observando e ia aplicar oficina para os alunos. Então desde o começo eu já vi. Mas a única coisa que eu me lembro.

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O diálogo entre o investigador e os licenciandos **L2**, **L3** e **L5** indica que eles mobilizaram conjuntamente conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática associado às expectativas de aprendizagem que consiste em considerar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como documento orientador de aulas de matemática e o Projeto Político Pedagógico (PPP) como documento institucional que define os conteúdos matemáticos que devem ser abordados em cada ano escolar **(e12, KMLS)**. O licenciando **L2** relata sem detalhar, [cf. Linhas 902-905],o PPP e o PCN da escola que estagiou, o que indica um indício de conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática associado às expectativas de aprendizagem, associado a conteúdos propostos nas normas curriculares dos níveis de ensino, que consiste em orientações curriculares estipuladas nos documentos oficiais e nas recomendações curriculares **(i9, KMLS).**

Os sujeitos em questão conhecem documentos que contém diretrizes curriculares (PCN e PPP) e que se sabe serem fontes de conhecimentos KMLS sobre o que é estipulado para um aluno aprender e o nível conceitual e procedimental de tópicos matemáticos em um determinado momento escolar (ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016). Entretanto, as manifestações não forneceram elementos suficientes para que se compreendesse seu conhecimento sobre o conteúdo destas diretrizes ou parâmetros curriculares. Sendo assim, acredita-se haver apenas indício de conhecimento sobre o conteúdo das orientações curriculares da Matemática estipuladas em documentos oficiais.

Apresenta-se, a seguir, o Quadro 23, referente à manifestação do sujeito e análise MTSK do pesquisador na discussão por parte dos licenciandos em Matemática sobre recomendações curriculares no ensino da Matemática.

Quadro 23 – Manifestação do sujeito e análise MTSK do pesquisador: Parâmetros Curriculares

TRECHO DA TRANSCRIÇÃO	ANÁLISE DO PESQUISADOR		
Evidência/Indício	Conhecimento...	associado a...	que consiste em ...
[798-801] L3 É o que é baseado nas aulas, PCN **I** Você falou do PCN e PPP. Onde você viu o PCN? Você conhece? **L5** Acho que foi no estágio 1 que teve que ler o PCN e PPP da escola e fazer um relatório sobre ele. Só que o PPP estava desatualizado e precisava ser atualizado.	dos parâmetros da aprendizagem de matemática (evidência14, KMLS)	expectativas de aprendizagem	considerar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como documento orientador de aulas de matemática e o Projeto Político Pedagógico (PPP) como documento institucional que define os conteúdos matemáticos que devem ser abordados em cada ano escolar

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O quadro a seguir sintetiza os conhecimentos mobilizados neste episódio, no qual não se identificaram evidências de conhecimentos.

Quadro 24 – Síntese dos conhecimentos mobilizados: Parâmetros Curriculares

EVIDÊNCIA DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
considerar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como documento orientador de aulas de matemática e o Projeto Político Pedagógico (PPP) como documento institucional que define os conteúdos matemáticos que devem ser abordados em cada ano escolar	KMLS	L5
INDÍCIOS DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK	SUJEITOS
9. Orientações curriculares estipuladas nos documentos oficiais e nas recomendações curriculares.	KMLS	L2

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

4.6 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Nas seções 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam-se os conhecimentos e indícios de conhecimentos identificados a cada episódio de ensino, cada qual com um foco específico a partir das propostas feitas na atividade formativa baseada na tríade *MTSK-oficina-situações de prática*. Para sintetizar estes resultados, apresenta-se abaixo o Quadro 25 com todos os conhecimentos e indícios identificados nos 5 episódios de ensino.

Quadro 25 – Síntese dos resultados

Episódio	EVIDÊNCIA DE CONHECIMENTO DE ...	SUBDOMÍNIO MTSK/ CATEGORIAS	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	SUJEITOS L LINHAS [ ]
Episódio 1	aplicação da regra de três a resolução do problema em questão do tipo proporção (entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido)	KoT Fenomenologia **(e1, KoT)**	CONTRERAS, 2012; CARRILLO et al., 2014; MORIEL JUNIOR, 2017	L6 [106-109]
	um propriedade: Equivalência de frações ($\frac{20}{2,5}=\frac{40}{5}=\frac{8}{1}$)	KoT Propriedades **(e2, KoT)**	CISCAR; GARCIA, 1998 VASCONCELOS, 2007; SILVA; ALMOULD, 2008; VERNEQUE, 2011; RIPOLL et al., 2016;	L6 [106-109]
	um procedimento: regra de três	KoT Procedimentos **(e3, KoT)**	BRASIL,1998	L6 [106-109]
	o algoritmo inverter e multiplicar para a dividir de frações	KoT Procedimentos **(e4, KoT)**	NILLAS, 2003; CONTRERAS, 2012; LI, 2008; LOPES, 2008; ÖZEL, 2013; TIROSH, 2000; ROJAS et al., 2015; MORIEL JUNIOR, 2014	L6 [121-124] L1 [125-127] L2 [136-138]
	dois modos de representar um número (decimal e fracionário) e a conversão entre eles ($2,5=\frac{5}{2}$)	KoT Registros de representação **(e5, KoT)**	BRASIL, 1997	L6 [121-124] L1 [125-127]
	Nomenclatura das partes da fração: numerador e denominador.	KoT Definições **(e6, KoT)**	SILVA, 2019	L1 [125-127] L2 [136-138]
	Método de divisão pela chave	KoT Procedimentos **(e7, KoT)**	SILVA, 2019	L1 [125-127]
Episódio 2	um erro comum de alunos ao dividir frações	KFLM Fortaleza e dificuldades **(e8, KFLM)**	DAVIS; ESPOSITO, 1990; TIROSH, 2000; ASHLOCK, 2006; NEWTON, 2008; BERTONI, 2008; REDMOND, 2009; BAYOUD, 2011; ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016	L3 [204-205]
	Algoritmo inverter e multiplicar para dividir frações	KoT Procedimentos **Valida[6] (e4, KoT)**	NILLAS, 2003; CONTRERAS, 2012; LI, 2008; LOPES, 2008; ÖZEL, 2013; TIROSH, 2000; ROJAS et al., 2015; MORIEL JUNIOR, 2014	L6 [193-196]
	Nomenclatura das partes da fração: numerador e denominador	KoT Registros de representação	BRASIL, 1997	L3 [204-205]

[6] Subdomínio MTSK/ Categoria já identificada em episódio anterior

		Valida (e6, KoT)		
Episódio 3	uma abordagem utilizando um "copo de medida" como recurso material para explicar o conteúdo de fração	KMT Estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático **(e9, KMT)**	VALE, 2002; ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016; (FLORES MEDRANO, 2015)	L3 [708-714]
Episódio 4	Reconhecer como ferramenta de ensino um livro didático e suas aplicações utilizando tecnologia	KMT Recursos materiais e virtuais **(e10, KMT)**	MOURA, 2016	L3 [732 -734]
	Um recurso virtual para ensinar frações: jogo *on line* chamado enigma das frações, em que aparecem perguntas e desafios.	KMT Recursos materiais e virtuais **(e11, KMT)**	ROJAS, 2014	L2 [838] L6 [844]
Episódio 5	Ter conhecimento do Projeto Político Pedagógico; Plano Curricular: nível de ensino; Curso; bases das orientações metodológicas estipuladas nos documentos oficiais e nas recomendações curriculares.	KMLS Nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado **(e12, KMLS)**	ESCUDERO-ÁVILA et al., 2016.	L5 [800-801]
Episódio	**INDÍCIOS DE CONHECIMENTO DE ...**	**SUBDOMÍNIO MTSK/ CATEGORIAS**	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	**SUJEITOS LINHAS [ ]**
Episódio 1	Relacionar conteúdos ensinados com conteúdos anteriores	KSM Conexão de Simplificação **(i1, KSM)**	MONTES et al., 2013; ROJAS, 2014; FLORES-MEDRANO et al., 2014; ; CARRILLO et al., 2014; MONTES; CLIMENT, 2016	L6 [134]
	O aluno das séries iniciais sabe que 5 dividido por dois é 2,5.	KMLS Nível de desenvolvimento conceitual esperado **(i2, KSM)**	MORIEL JUNIOR, 2014	L2 [136-138]
Episódio 2	Um erro comum de alunos ao dividir frações: dividir numeradores entre si e conservar os denominadores	KFLM Fortalezas e dificuldades **(i3, KFLM)**	FLORES; ESCUDERO; AGUILAR, 2013	L4 [191] L1 [206]
	Algoritmo "produtos cruzados" para dividir frações.	KoT Procedimentos **(i4, KoT)**	CONTRERAS, 2012	L3 [204-205]

Episódio 3	dificuldades associadas à aprendizagemcorrespondente ao conteúdo matemático	KFLM Fortalezas e dificuldades **(i5, KFLM**)	DAVIS; ESPOSITO, 1990; TIROSH, 2000; ASHLOCK, 2006; NEWTON, 2008; BERTONI, 2008; REDMOND, 2009; BAYOUD, 2011; ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016	L6 [699-704]
	estratégias, técnicas e tarefas para ensinar um conteúdo matemático	KFLM Fortalezas e dificuldades **(i6, KFLM**)	ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016; VALE, 2002	L6 [699-704]
	Estratégias, técnicas e tarefas para ensinar divisão de frações	KMT abordagens de ensino baseada na ludicidade („brincadeira") ou no uso/representação de materiais concretos („pizza") **(i7, KMT)**	VALE, 2002; ESCUDERO-ÁVILA, et al., 2016	L6 [715-718]
Episódio 4	Influência da socialização de resolução de problemas matemáticos em ambiente virtual no contexto e na concentração dos alunos no planejamento	KMT Estratégias, técnicas etarefas para ensinar um conteúdo matemático **(i8, KMT)**	(FLORES et al., 2014)	L1 [705-707]
Episódio 5	saber sobre o conteúdo das orientações curriculares da matemática estipuladas em documentos oficiais	KMT Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos **(i9, KMT)**	ESCUDERO-ÁVILA et al., 2016.	L2 [902-905]

Fonte: Produção do próprio autor (2019).

O conjunto acima apresentado compõe os conhecimentos mobilizados e indícios de conhecimento identificados durante a oficina formativa. Percebe-se que apenas no subdomínio conhecimento da prática matemática não houve a manifestação de conhecimentos ou identificação de indícios, assim a atividade formativa proposta demostrou ser um método profícuo para mobilização e construção de conhecimento especializado de professores de Matemática. A seguir tem-se, na discussão dos resultados, um panorama geral dos principais pontos da investigação conduzida, porém desta vez sendo a discussão organizada por subdomínio do MTSK e não por episódio como feito anteriormente.

4.7 Discussão dos resultados

O Quadro 25, no qual se sintetizou os resultados de conhecimento especializado por episódios, possibilitou ampliar a compreensão da mobilização ou construção de conhecimentos durante a oficina formativa nos diferentes subdomínios do MTSK, os quais se discute a seguir.

No subdomínio conhecimento dos tópicos (KoT) foram identificados conhecimentos nas categorias de fenomenologia, propriedades, definições, procedimentos, registros e representações. Os resultados apontaram que o conhecimento de tópicos matemáticos foi o subdomínio que mais foi mobilizado pelos futuros professores apresentando um total de 7 evidências de conhecimentos em consonância com a literatura, sendo o único conhecimento abordado em distintos episódios o procedimento inverter e multiplicar (AGUILAR, 2015).

O segundo subdomínio com maior concentração de conhecimentos está incluso no domínio do conhecimento didático do conteúdo, e aborda o conhecimento do ensino da matemática (KMT), desta forma percebe-se a importância da transformação do conhecimento matemático do professor em conhecimento didático do conteúdo para torná-lo compreensível ao aluno (CARRILLO et al., 2014). No caso deste subdomínio, três dos seis itens identificados são indícios de conhecimento. Destes, quatro são da categoria estratégias, técnicas, tarefas e exemplos e dois da categoria recursos materiais e virtuais. Os licenciandos citaram alguns livros que adotaram quando de suas regências em sala de aula e teceram alguns comentários aos mesmos, e no que tange aos recursos virtuais, mostraram seu conhecimento ao comentarem um aplicativo da internet "enigma das frações", que consultado posteriormente se destaca pela qualidade de recursos apresentados, contendo todas as operações com frações.

Nos outros dois subdomínios do domínio do conhecimento didático do conteúdo foram identificados três conhecimentos, sendo uma evidencia e dois indícios, em cada. No conhecimento de características da aprendizagem matemática (KFLM) os licenciandos **L3**, **L4** e **L6,** apesar de não conhecerem referenciais teóricos que tratam dos erros comuns dos alunos, identificaram os erros apresentados na Situação 2, ao serem solicitados a avaliarem um erro cometido comumente por alunos ao resolverem uma divisão de frações, mobilizando o conhecimento de características da aprendizagem matemática. Este desconhecimento por parte dos licenciandos, de quais são os erros comuns dos alunos, reforça a necessidade de incluir este conhecimento na formação de professores (DAVIS; ESPOSITO, 1990; TIROSH, 2000; ASHLOCK, 2006; NEWTON, 2008; REDMOND, 2009; BAYOUD, 2011).

No subdomínio conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática (KMLS) os dois indícios de conhecimentos identificados e a evidência de conhecimento manifestado pelos licenciandos eram da categoria do nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado. Os documentos mencionados como fontes para estes conhecimentos pelos licenciandos foram o Projeto Político Pedagógico e os Parâmetros Curriculares Nacionais, o que se mostra coerente com a necessidade do professor "saber lidar com a questão matemática em documentos oficiais, refletindo no ensino os conteúdos mínimos previstos no currículo escolar" (ROJAS, 2014, p. 102, tradução nossa).

No subdomínio conhecimento da estrutura da matemática (KSM) foram identificados dois indícios de conhecimento no qual se identificou que os licenciandos **L2** e **L6**, na Situação 1 (discussão de um problema utilizando divisão de frações), utilizaram a relação de conteúdos ensinados (como regra de três simples, com os anteriores: proporção e simplificação de frações) para resolver a questão. Desta forma observa-se que o licenciando utilizou-se de uma conexão de simplificação, ou seja, relacionou o conteúdo ensinado com os anteriores (CARRILLO et al., 2014).

Na análise dos dados obtidos na oficina formativa não foram identificados conhecimentos ou indícios destes referentes ao subdomínio conhecimento da prática matemática (KPM), pois não se percebeu os licenciandos abordarem modos de proceder em matemática relacionados a provas ou demonstrações, como a demonstração da validade do algoritmo inverter-e-multiplicar (IM), que poderia ter sido abordada, especialmente nas situações 1 e 2, que abordam procedimentos para divisão de frações. Não é possível afirmar se a não mobilização de conhecimentos deste subdomínio se deve a limitações no conhecimento dos licenciandos sobre a validade do algoritmo. Porém é importante ressaltar que são estes conhecimentos que habilitam os professores de Matemática a avaliar raciocínios matemáticos elaborados por alunos e elaborar uma explicação instrucional no sentido de aceitá-los, refutá-los ou refiná-los (FLORES et al., 2014). Desta forma considera-se a não discussão de conhecimentos deste subdomínio um aspecto a ser melhorado em futuras ações formativas que envolvam situações de prática como a que foi desenvolvida neste trabalho, de modo a incluir conhecimentos deste subdomínio no processo formativo.

Frente ao exposto, percebe-se que as questões de prática discutidas na oficina formativa com os licenciandos em Matemática abordaram o conteúdo de modo mais amplo do que a simples manipulação de algoritmos. Desta forma, identificou-se a mobilização de conhecimentos nos dois domínios do MTSK, didático e matemático, de modo a não incorrer em uma formação que não oportunizasse a superação das dificuldades dos professores para ensinar os conceitos envolvidos na divisão de frações em função da comum falta de conhecimento didático do conteúdo (ÖZEL, 2013).

E, diante desse quadro, concorda-se com Li e Kulm (2008) ao afirmar que os futuros professores precisam desenvolver uma compreensão sólida e profunda do conhecimento de Matemática para o ensino de modo a ajudá-los a entender que na Matemática faz sentido explicar que existem razões para os procedimentos e os algoritmos utilizados (TYMINSKI; DOGBEY, 2012). Desta forma estes não se sentirão compelidos a incorrer em um ensino procedimental do conteúdo por conhecerem seus fundamentos, evolução histórica e a relação da matemática com a realidade (FIORENTINI, 2005).

Os acadêmicos, aos discutirem as Questões de Práticas, que são situações que podem ocorrer no cotidiano em uma sala aula, mobilizaram conhecimentos dos subdomínios do MTSK, a saber: KoT, KSM, KFLM, KMLS e KMT. Foi percebido que ao longo da oficina os alunos se valeram de ensinamentos que tiveram nas séries primárias e no Ensino Médio, conforme relatos informais ao término da atividade formativa, assim suas respostas iniciais associadas as discussões vivenciadas na oficina formativa promoveram a mobilização e construção de conhecimento especializado de Matemática.

A mobilização desses conhecimentos auxiliará os futuros professores a superarem três dos quatro problemas inter-relacionados, tanto na teoria como na prática, apontados por Wu (1999).

O primeiro é que o conceito de fração nunca é definido claramente e suas diferenças com os números inteiros não é enfatizada suficientemente (WU, 1999). Sobre isso, tem-se que o conceito da diferença entre números inteiros e de fração foi destacado durante a oficina. Isto ocorreu durante o debate da Situação 3 sobre a preparação das aulas. O licenciando **L6** relatou situação de aula na qual apresentou o paralelo entre medidas inteiras e frações valendo-se para isso de um copo medida para que os alunos visualizassem o conceito de frações conforme análise feita em **(e8, KoT)**. Ainda na Situação 3, o licenciando **L6** voltou a relatar situação na qual apresenta a ideia de trabalhar frações de um modo geométrico, como a divisão utilizando barras, conforme analisado em **(e8, KoT).**

O segundo é que as regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade (WU, 1999). Na atividade formativa, as regras das operações aritméticas com frações foram relacionadas às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos do Ensino Fundamental têm familiaridade. Observou-se este debate no relato do licenciando L1 durante a exposição da Situação 3. A proposta por ele apresentada foi a possível aplicação de atividade didática que relacionasse a divisão de frações à partição de uma pizza inteira, conforme análise do indício 7 de conhecimento relativo a estratégias, técnicas e tarefas para ensinar divisão de frações **(i5, KMT)**. Novamente na Situação 3, o licenciando **L2** relata que, como estratégia instrucional, é importante resgatar as regras das operações com inteiros, como a multiplicação, para então introduzir as operações com frações, conforme análise em **(i3, KFLM)**.

O terceiro consiste no fato de que, em geral, explicações matemáticas essenciais de quase todos os aspectos do conceito de fração não são dadas (WU, 1999). No decorrer da oficina formativa foram discutidas as explicações matemáticas essenciais dos aspectos do conceito de fração. Este aspecto pode ser exemplificado com a discussão realizada na Situação 1, na qual uma Regra de operações aritméticas com frações (no caso, algoritmo inverter-e-multiplicar da divisão de frações) foi relacionada a um procedimento com números inteiros (regra de três) com os quais os licenciandos tem familiaridade, conforme análise em **(e4, KoT)**.

O quarto problema apontado por Wu (1999) é que as complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico. Apesar da atividade formativa abordar o conceito básico de frações, este quarto aspecto problemático referente à sequência didática adotada para o ensino do tópico, não foi trabalhado junto aos licenciandos.

Assim, apesar dos exemplos acima relatados mostrarem a potencialidade da oficina formativa para a mobilização e a construção de conhecimento especializado, observa-se, também, uma oportunidade de melhoria nas situações de prática apresentadas na oficina formativa, de modo que todos os quatro problemas inter-relacionados apontados por Wu (1999) sejam contemplados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou responder a seguinte pergunta: como atividades formativas baseadas em questões de práticas contribuem para a construção ou mobilização de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte dos licenciandos em Matemática? Para analisar a potencialidade das atividades formativas, no que se refere às discussões das questões de prática com o tema da divisão de frações, adotaram-se futuros professores como sujeitos da pesquisa e, como contexto, uma oficina sobre o tema, na qual o pesquisador atuou como investigador e os licenciandos discutiram as questões propostas coletivamente.

Os resultados, sintetizados no Quadro 25, mostram que foi possível analisar a potencialidade de atividades formativas, baseadas em questões de prática, como metodologia para construção ou mobilização de conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte de licenciandos. Conclui-se que as principais potencialidades são:

- A abordagem coletiva das questões de prática permite a interação dos licenciandos o que potencializa a construção de conhecimento especializado.
- A atividade formativa baseada na tríade *MTSK-oficina-situações de prática* realizada em ambiente natural dos licenciandos favoreceu o engajamento dos sujeitos e oportunizou a mobilização/construção de conhecimentos vinculados à prática docente.
- A oficina formativa estruturada no modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática promove a aproximação entre a pesquisa e a prática.
- As questões de prática, quando utilizadas na formação de professores, favorecem a integração dos conhecimentos da área disciplinar e da área pedagógica com foco em um conteúdo matemático específico.

Observou-se que, ao aproveitar o cenário de aprendizagem coletiva, a interação dos licenciandos foi um dos catalizadores para mobilização e construção de conhecimento especializado durante a oficina formativa. A construção de conhecimento, com a mudança de conceitos, ocorre de modo mais claro no episódio 2, quando, inicialmente, alguns licenciandos avaliam como correta uma resolução errada ($\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$) e depois da discussão concluem que era uma resolução errada.

Outro aspecto que contribuiu para o interesse dos licenciandos em participar dos debates consiste no fato da investigação dos sujeitos ter sido conduzida em seu ambiente natural (BOGDAN; BIKLEN, 1991), por meio da atividade formativa baseada na tríade *MTSK-oficina-situações de prática*, oportunizando, então, a mobilização/construção de conhecimentos vinculados à prática docente.

Uma das consequências deste estudo é a promoção da associação entre pesquisa e ação, teoria e prática. Por meio das interações durante a oficina, houve avanço na compreensão dos licenciandos do conhecimento especializado sobre o processo do ensino e aprendizagem de

Matemática, assim como a oportunidade de vivenciar uma atividade formativa estruturada no modelo teórico do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática.

O MTSK, nesta pesquisa, foi utilizado, também, como ferramenta analítica para classificação dos conhecimentos identificados. Observa-se que houve, durante as discussões promovidas, a mobilização de conhecimentos do domínio didático e do domínio matemático por parte dos licenciandos. Esta mobilização simultânea de conhecimentos dos dois domínios do MTSK foi motivada pelas questões de prática adotadas como fio condutor da oficina formativa. Assim, percebe-se que o uso de situações semelhantes às vivenciadas em sala de aula favorece a construção de conhecimento especializado por parte dos licenciandos, pois promove a integração dos conhecimentos da área disciplinar e da área pedagógica com foco em um conteúdo matemático específico, no caso, a divisão de frações.

Apesar dos resultados elencados, também foram encontradas limitações ao longo do desenvolvimento da pesquisa, entre as quais pode-se citar a não identificação de conhecimento especializado do subdomínio do Conhecimento da Prática Matemática (KPM), o que sugere a investigação sobre esta lacuna inesperada em estudos futuros, e a não investigação de indícios de conhecimentos por não se ter incluído uma segunda etapa na pesquisa para tanto.

Outro aspecto que pode ter limitado a gama de conhecimentos identificados na investigação foi a escolha de licenciandos como sujeitos da pesquisa. Desta forma a atividade formativa foi conduzida com docentes ainda em formação e, portanto, com pouca experiência em sala de aula, a não ser por eventuais substituições e na participação de estágio obrigatório, o que pode ter reduzido o espectro de abordagens didáticas e matemáticas possíveis quanto às situações apresentadas. Assim entende-se que a condução da oficina com professores experientes provavelmente apresentaria um conjunto mais amplo de conhecimentos identificados, sendo esta uma das sugestões de estudo futuro. Por outro lado, uma vez que a falta de vivência em sala de aula limitou a contribuição dos licenciandos no tocante à identificação de conhecimentos especializados, há o indicativo da necessidade da inclusão de atividades formativas que envolvam questões de prática em sua formação inicial.

Outro aspecto curricular a ser observado na formação inicial dos futuros professores é a contemplação apenas dos conteúdos de nível superior pela matriz curricular da licenciatura em Matemática e a não exploração dos conhecimentos básicos pelos formadores. Esta lacuna na formação inicial torna primordial a formação contínua do professor de Matemática, principalmente o recém-formado, que é levado à sala de aula sem o preparo adequado para enfrentar os questionamentos dos discentes. Os conteúdos excluídos do processo de aprendizagem inicial caem no esquecimento, pois durante o curso acadêmico não foram utilizados. No entanto, estes conteúdos são primordiais para o exercício da docência no ensino fundamental.

Além de a pesquisa levantar ponderações sobre os conteúdos abordados na licenciatura em Matemática, percebe-se, também, a necessidade de reflexão sobre o currículo dos cursos, no sentido de se incluir modelos teóricos como o MTSK em sua estruturação. Entende-se que o MTSK, ao nortear propostas pedagógicas de cursos de formação inicial e continuada, pode propiciar a preparação de professores que fundamentem seu trabalho em constructos teóricos-científicos adequados, desde o planejamento até sua prática em sala de aula, passando pela reflexão sobre a prática e em ação como mecanismo de desenvolvimento profissional.

Como exemplo do impacto que a compreensão do MTSK pode causar no desenvolvimento profissional docente, apresento meu próprio percurso, como professor de Matemática, ao longo destes anos de mestrado, nos quais me aprofundei neste constructo. Pode-se afirmar que a partir dos meus estudos do Modelo Teórico MTSK houve uma reflexão profunda acerca da minha prática pedagógica, o que motivou um processo de mudança da minha postura enquanto professor, não só no que concerne ao planejamento de aulas, uma vez que os domínios e subdomínios do MTSK passaram a se fazer presentes nesta rotina, mas também na minha compreensão do processo de ensino-aprendizagem. Esta evolução pessoal, após 38 anos de magistério, me faz refletir sobre o que eu poderia ter feito melhor se detivesse esse conhecimento no passado.

Características pessoais e profissionais a mim atribuídas pelas turmas com que trabalhei: esforço; superação de dificuldades; confiança na orientação e bons resultados.

Entretanto, sempre é tempo de se aperfeiçoar, a melhor forma é mudar a si mesmo para, então, influenciar os demais colegas de profissão a expandirem seus conhecimentos e a melhorarem suas aulas com o MTSK. A divulgação e o completo entendimento deste modelo podem trazer uma verdadeira revolução no ensino-aprendizagem da tão incompreendida Matemática. Assim, dar subsídios aos licenciandos para que possam ter práticas de ensino que gerem aprendizagem, perpassa, em nossa visão, pela construção de conhecimento especializado por parte dos futuros professores.

A mesma demanda existe no tocante à atualização dos atuais professores, desta forma é de suma importância que as instituições oportunizem, de fato, a formação contínua aos docentes, tendo como foco principal torná-los capazes de desenvolverem, na sua prática profissional, as mudanças exigidas no ensino e na pesquisa, ou seja, de produzirem conhecimentos na área de ensino e de educarem os estudantes para uma completa inserção social e para o uso pleno dos seus direitos.

No sentido de contribuir com este processo de evolução da profissão docente e do aprendizado da Matemática por parte dos estudantes propõem-se diferentes aspectos a serem considerados para possíveis investigações futuras, tais como: (i) realizar oficinas formativas com licenciandos em Matemática de outros estabelecimento de ensino; (ii) aprimorar as questões de prática nas quais houve poucas mobilizações de conhecimentos; (iii) incluir questões de prática que visem especificamente abordar conhecimentos do subdomínio conhecimento da prática matemática (KPM); (iv) incluir na atividade formativa a abordagem da sequência didática de modo a trabalhar todos os problemas inter-relacionais apontados por Wu (1999); (v) aplicar oficinas formativas aos professores-formadores da instituição onde foi realizada esta investigação; (vi) aplicar oficinas formativas aos professores em exercício no ensino fundamental; e (vii) incluir a entrevista como uma segunda etapa de investigação de indícios de conhecimentos identificados durante a oficina formativa.

Acredita-se que a continuidade das pesquisas colabore com os avanços na área, subsidiando estudos que consigam oferecer resultados que complementem e aprofundem aqueles aqui alcançados. Assim, espera-se que haja uma contínua evolução no ensino da Matemática, para melhor, de modo profissional, com ampla fundamentação para as ações tomadas.

No atual contexto, no qual esta pesquisa se insere, é necessário que os futuros professores e professores em exercício tenham uma mudança na sua prática pedagógica, porém isto requer a capacidade de mudar a si mesmo, para então fugir de um discurso alijado da prática tão propagado em nosso meio educacional. Este autodesenvolvimento docente requer a inclusão de novos paradigmas sobre o que caracteriza um profissional do ensino da Matemática, ou seja, o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática.

Com esta nova compreensão, sobre os diversos conhecimentos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, haverá professores comprometidos em efetivar, na prática, os propósitos educacionais e promover no cotidiano, da sala de aula, mudanças significativas no modo de ensinar, pois terão subsídio para planejar uma “aula diferente”, que resgate o educando desmotivado e gere uma efetiva melhora nesse processo.

Portanto, esta investigação sobre conhecimento de futuros professores não só diagnosticou, mas também apontou o potencial formativo para que licenciandos desenvolvam conhecimento especializado para ensinar Matemática, indicando que um ensino básico de melhor qualidade necessita que o licenciando tenha durante sua formação inicial oportunidades para construção de conhecimento especializado. Isto reforça que o exercício da docência é uma atividade profissional cujo exercício por pessoas leigas, que se intitulam capazes ou se consideram donas de notório saber, é inconcebível. Cabe aos professores de Matemática unirem-se em prol da valorização profissional e formação especializada, em oposição a critérios genéricos de entrada e permanência na profissão.

REFERÊNCIAS

AGUILAR, A.; CARREÑO, E.; CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; ESCUDERO, D.; FLORES, E.; FLORES, P.;MONTES; M.; ROJAS, N. **En Actas dela VII CIBEM, El conocimiento especializado del profesor de matemáticas**: MTSK (5063-5069). VII CIBEM. Uruguay. 2013.

AGUILAR, A. **El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas**. Un estudio de caso. Huelva: Universidad de Huelva. 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. **Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem**. Bolema, ano 17, n. 22, p. 19 – 35. 2004.

ARIAS, J. M.; MAZA, I. **Matemáticas 3º ESO**. Barcelona: Casals. 1997.

ARNON, I.; COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; OKTAÇ, A.; ROA-FUENTES, S.; TRIGUEROS, M.; WELLER, K. **APOS Theory**: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Frankfurt: Springer. 2014.

ASHLOCK, R. B. **Error patterns in computation:** Using error patterns to improve instruction. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Education. 2006.

BAILER, C.; TOMITCH, L, M. B.; M.; D‟ELY, R. C. S. **Planejamento como processo dinâmico**: a importância do estudo piloto para uma pesquisa experimental em linguística aplicada. Revista Intercâmbio, v. XXIV: 129-146. 2011. São Paulo: LAEL/PUCSP. ISSN 2237-759x.

BALL, D.L. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. **Journal for Research in Mathematics Education**. v. 21, n. 2. Reston, Virgínia , EUA. 1990.

BALL, D. L. **Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy**: Examining what teachers bring to teacher education. Doctoral theses. Michigan State East Lansing, MI. 1988.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of teacher education,** v. 59, n. 5, p. 389-407. 2008.

BARBOSA, E. P. **Os Por Quês Matemáticos dos Alunos na Formação dos Professores**. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIAEM. Recife. 2011.

BAYOUD, J. M**. A comparison of pre-service and experienced elementary teachers' pedagogical content knowledge (PCK) of common error patterns in fractions.** Thesis (Master of Arts). Departament of Education, American University of Beirut, Beirut. 2011.

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 209-237. 2008.

BOGDAN, R; BIKLEN, S**. Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto. 1991.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais** : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF. 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais** : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF. 1998.

BROMME, R. **Beyond subject matter**: A psychological topology of teachers‟ profesional knowledge. En R. Biehler, R. Sholz, R. Sträer, y B. Winkelman (Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline p. 73-88. 1994.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. **A Ideia de unidade na construção do conceito do número racional**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. São Carlos: UFSC, V2.4, p. 68-93. 2007.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In: UBUZ, B.;HASER, C. et al. (Ed.). **VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8**). 8. Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara. 2013. p.2985-2994.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. Á.; ESCUDERO, D.; MEDRANO, E. F. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad Huelva Publicaciones. 2014.

CARRILLO, J.; ROJAS, N.; FLORES, P. **Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales**. Avances de Investigación en Educación Matemática, v. 1, n. 4, p. 47-64. 2013.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES,M; CONTRERAS,L.C. **El Conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización:** MTSK**.** Publicado en Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v. 22, p. 185-205. 2017. Irem de Strasbourg.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; M. MUÑOZ-CATALÁN, C. Research in Mathematics Education. **The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model**. 2018.

CISCAR, SALVADOR LLINARES; GARCIA, MARIA VICTORIA SÁNCHEZ. **Fracciones**: la ralacion parte-todo. Madri: Editora Sintesis S.A. 1988.

CONTRERAS, M. **La división de fracciones**: un algoritmo misterioso. VI Jornades D‟Educació Matemática de la Comunitat Valenciana Societat D‟Educació Matemática de la Comunitat valenciana "al−Khwarizmi".Valencia. 2004.

CONTRERAS, M. **Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje.** 2012. Tese (Doutorado). Departament de Didàctica de les Matematiques, Universidad de Valencia, Valencia.

CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. Á. **Reflexionando sobre es conocimiento del professor** (Actas de las II Jornadas del SIDM). Huelva: UHU, 106 . ISBN 978846089815. 2015.

COSLETT, D. **A closer look at Fraction Division**: How does Comprehension and Confidence of the Subject Change Preservice Teachers‶ perception of instructional practice? The 97lementar97e97 f Mathematics at Virginia Tech. 2004.

D‶AMBROSIO, B. S. **Formação de professores de matemática para o século XXI**: O grande desafio. Pro-Posições (Unicamp. São Paulo), v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993.

D‶AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: um programa a educação matemática. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 5- 11. 1993.

DALMAU, C. J. **Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas contenidos en los libros "Aritmética razonada y nociones de Álgebra" y "Lecciones de Aritmética**". Madrid: Librerías Hernando e Hijos de Pérez. .1898.

DAVIS, C. L. F.; ESPOSITO, Y. L. Papel e função do erro na avaliação escolar. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, SP, n. 74, p. 71-75. 1990.

DAVIS, B.; SIMMT, E. **Mathematics-for-teaching**: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. Educational Studies in Mathematics, 61, 293–319. 2006.

DENZIN, N. The Research Act**.** 3. ed. Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall. 1989.

DOMINSCHEKI, D. L.; ALVES, T. C. **O PIBID como estratégia Pedagógica na formação inicial docente**. Revista Internacional de Educação Superior [RIESup]. Campinas, SP. v. 3, p. 642-644. 2017.

DUARTE, N. **O debate contemporâneo das teorias pedagógicas**. IN: MARTINS, Lígia Márcia; orgs. Formação de professores: limites contemporâneos e alternativas necessárias [online]. São Paulo: Editora UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica. 2010. p. 33-49.

ESCUDERO-AVILA, Dinazar**. Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.** Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva. 2015.

ESCUDERO-ÁVILA, D.; CONTRERAS, L.C.; VASCO, D. **Conocimiento de la enseñanza de la matemáticas (KMT).** En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 35-41). SGSE: Huelva. 2016.

FIORENTINI, D. **A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática**. Revista de Educação PUC-Campinas, n.18.p.107-115. 2005.

FLORES, P. **El algoritmo de la división de fracciones**. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, 70, 27-40. 2008.

FLORES, P. **¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de Primaria, en el área de Matemáticas**. In: VII Congreso Iberomericano de Educación Matemática., 7., 2013, Montevideo. **Anais...** Montevideo. 2013.

FLORES, E.; ESCUDERO, D. I.; AGUILAR, A. **Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK**. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (17. ed., pp. 275-282). Bilbao, Espanha: SEIEM. 2013.

FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; MONTES, M.;AGUILAR, Á.; CARRILLO, J. **Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK**. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones. 2014.

FLORES-MEDRANO, E. **Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).**Tesis Doctoral. Huelva. 2015.

FLORES-MEDRANO, E. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes . **Conocimiento de la práctica matemática (KPM).** Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 30-34). Huelva: CGSE. 2016.

GARCIA, M.V. S. **Dificuldades específicas em el aprendizaje de las fracciones**. Estúdio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. Ministério de Education, Cultura y Desporte. 2003.

GARCÍA, A. I. M. **Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones**. 2013. Dissertação (Mestrado). Universidad de Granada, Granada.

GATTI, B**. Formação de professores no Brasil**: características e problemas. Educação e Sociedade. Campinas. 2010.

GRAEBER, A. O.; BAKER, K. M. **“Little into Big Is the Way It Always Is.”** Arithmetic Teacher 39. 1992.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Brasília.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. 2018. Brasília.

GOUTARD, M. **Mathematics and Children, Reading, England, Educational Explorers**. Descriptions and examples of learning through experience.1964.

JARAMILLO, D. **(Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas,SP. 2003.

KARP, K. S., BUSH, S. B.; DOUGHERTY, B. J. **12 math rules that expire in the middle grades**. Mathematics Teaching in the Middle School, vol. 21. 2015.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. **Adding it up:** Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academies Press. 2001.

KRIPPENDORFF, K. **Metodología del análisis de contenido**. Barcelona: Paidós Ibérica, 1990. 279 p.

KUZNIAK, A . **L'espace de Travail Mathématique et ses genèses**. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, pp.9-24.halshs-01060043. 2011

LI, Y. What Do Students Need to Learn about Division of Fractions? **Mathematics Teaching in the Middle School** v. 13, n. 9, p. 546-552. 2008.

LIMA, S. S. **Conhecimento especializado de professores de física: uma proposta de modelo teórico**. Cuiabá. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino) Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso.

LOPES, A. J. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 21, n. 31, p. 1-22. 2008.

LUÍS, M.; MONTEIRO, R.; CARRILLO, J. **Conhecimento Especializado do Professor para Ensinar Ciências**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, XVI., 2015, Lisboa, Portugal. Anais... Lisboa: APEduC, 2015. v. 1, p. 1 - 6.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics:** Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ. 1999.

MACENO, N.G.; SILVA, A.C.A.; LUCA, A. G. **Reformulação Curricular e a Prática como Elemento Integrador do Aprendizado em licenciaturas de Química**. Revista Debates em Ensino de Química. v. 4, n. 2 (esp), p. 5-31. 2018.

MAGINA, S.; BEZERRA, F. B.; SPINILLO, A. **Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração: uma experiência de Ensino**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos. Brasília. v. 90, n. 225, p. 489-510, maio/agosto. 2009.

MONTES, , A.; CARRILLO, J.; MUÑOZ-CATALÁN, C. **MTSK**: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the CERME 8 (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME. 2013.

MONTES, M. Á. **Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito**. Un estudio de caso. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva. 2014.

MONTES, M. A.; CLIMENT, N. **Conocimiento de la estructura matemática (KSM)**. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 21-29). Huelva: CGSE. 2016.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor***:* formação e prática docente na escola básica. (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais. 2004.

MOREIRA, P.; DAVID, M. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Ed. Autêntica. 2007.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. **A Teoria dos subcontratos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, UNESP. Vol. 21, nº 31, p.103-127. 2008.

MORIEL JUNIOR, J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Propostas de articulação entre teoria e prática em cursos de licenciatura em matemática. **Educação Matemática Pesquisa.** v. 11, n. 3, p. 535-557. 2009.

MORIEL JUNIOR, J.G.; CARRILLO, J. **Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK**. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Salamanca, Espanha. Anais... Salamanca, Espanha. 2014.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. 2014. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). PPGECEM/REAMEC, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

MORIEL JUNIOR, J. G.; SILVA FILHO, V. P.; TEIXEIRA M. C.; ZIMMERMANN JUNIOR C. **Questões para potencializar o conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**: VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática. 2017, Canoas, RS.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D. Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas,** v. 18, n. 2, p. 126-133, 2017. ISSN 2447-8733. 2017.

MORIEL JUNIOR, J. G.; MORAL, G. C. Y. **Conhecimentos Especializados para Ensinar Adição de Frações e como se relacionam**: um caso sobre erros comuns de estudantes, suas fontes e modos de superá-los. In: VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática. 2017, Canoas, RS.

MORIEL JUNIOR, J.G. ALENCAR, A. P. **Panorama quantitativo do COBENGE 2012-2017 sobre conhecimento especializado para ensinar Cálculo**. In: WorkIF, 2018, Cuiabá. Workif. Cuiabá: IFMT. 2018. v. 5. p. 11.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Uma nova categorização para as interpretações de divisão de frações**. VII CIBEM – Congresso Ibero Americano de Educación Matemática. Libro de Actas. ISBN 978-84-945722-3-4. Comunicaciones Breves – 801. Madrid. 2017.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Instrumento de análise MTSK (documento interno)**. Cuiabá. 2018. 1 p. Não publicado.

MORIEL JUNIOR, J. G.; ALENCAR, A. P. Conhecimento especializado para ensinar Cálculo: um panorama da produção do COBENGE 2012-2017. **Brazilian Journal of Development,** *no prelo*. 2019.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D.; CARRILLO, J. Uma meta-análise sobre conhecimento para ensinar divisão de frações. BOLEMA, no prelo. 2019.

MOURA, A.R.L. M. **Educar com a matemática**. Editora Cortez. São Paulo. 2016.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). EUA; November 2012.

NEWTON, K. J. An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers‟ Knowledge of Fractions. **American Educational Research Journal,** v. 45, n. 4, p. 1080-1110. 2008.

NEWTON K. J.; SANDS J. **Why ’on't We Just Divide Across?** Mathematics Teaching in the Middle School , Vol. 17, No. 6 pp. 340-345. National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virgínia, EUA, 2012.

NILLAS, L. **Division of Fractions: Preservice Teachers’ Understanding and Use of Problem Solving Strategies**. The Mathematics Educator, 7(2), 96 – 113. 2003.

NÓVOA, A. **Formação de professores e trabalho pedagógic**o. Lisboa: Educa. 2002.

ÖZEL, S. **An Analysis of In-service Teachers’ Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions**. **Anthropologist,** v. 16, n. 1-2, p. 1-5. 2013.

PAIS, L.C. **Ensinar e Aprender Matemática**. São Paulo: Editora Autêntica. 2018.

PARK, S.; OLIVER, J. S. Revisiting de conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual toll to understand teachers as professionals. **Research in science education**, v. 38, n. 3p. 261-284. 2008.

PONTE, J. P. **O estudo de caso na investigação em educação matemática.** Revista *Quadrante, 3*(1), 3-18. 1994.

RAFAEL, F. N. V. **Divisão de Frações:** Explorando Algoritmos Não Usuais. Educação Matemática Revista, N. 52- Julho. 2016.

REDMOND, A. **Prospective Elementary Teacher’s' Division of Fractions Understanding**: A Mixed Methods Study. 178 p. Thesis (Doctor of Philosophy). University of Phoenix, Stillwater. 2009.

RIBEIRO, M. S.; RÊGO, R. G. **A fração na perspectiva do professor dos anos iniciais do ensino fundamental**. IV Congresso Nacional de Educação (CONEDU). Anais 2017. Joao Pessoa, Paraíba. 2017.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.; BORTOLOSSI, H.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; WANDERLEY REZENDE, W.; QUINTANEIRO, W. **Frações no Ensino Fundamental - Volume 1.** Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS). 2016.

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. **Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseña os Números Racionales.** Bolema. Rio Claro. v. 29, n. 51, p. 143-167. 2015.

ROJAS, N. **Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas:** Un estudio de casos. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada. 2014.

ROWLAND, T., TURNER, F., THWAITES, A. & HUCKSTEP, P. **Developing Primary Mathematics Teaching**: reflecting on practice with the Knowledge Quartet, SAGE, Londres. 2005.

ROWLAND, T.; TURNER, F.; THWAITES, A.; HUCKSTEP, P. **Developing primary mathematics teaching**. London: SAGE. 2009.

RULE, A. C.; HALLAGAN, J. E. Preservice Elementary Teachers Use Drawings and Make Sets of Materials to Explain Multiplication and Division by Fractions. In: **Annual Preparing Mathematicians to Educate Teachers**, New York. 2006. p. 1-22.

SAEB, Sistema de Avaliação da Educação Básica. 2018. Brasília.

SANTOS, A. C. G. **Aprendizagem de conceito de proporção e o paradigma de equivalência de estímulos**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília. 1996.

SCHEINER, T.; MONTES, M.A.; GODINO, J.D.; CARRILLO, J.; PINO-FAN, L.R. **What makes mathematics teacher knowledge specialized?** Offering alternativo víeis. International Journal of Science and Mathematics Education, 37, 270. 2017.

SIEBERT, V. T. Estudo e ensino de frações: aprendizagens e dificuldades docentes no processo de formação continuada. 2015. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, 2015.

SILVA, M**. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

SILVA, L. P. M. **"Como fazer contas de dividir"**; *Brasil Escola*. Disponível em https://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-fazer-contas-dividir.htm. Acesso em 06 de maio de 2019.

SILVEIRA, M. R. A. D.; SILVA, P. V. A compreensão de regras matemáticas na formação docente: uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem. **Education Policy Analysis Archives,** v. 21, n. 27, p. 1-24. 2013.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. **Toward a theory of proficiency in teaching mathematics.** In T. Wood, & D. Tirosh (Eds.), Tools and processes in mathematics teacher education (pp. 321–354). London: Sense Publishers. 2008.

SILVA, M.; ALMOULD, S. **As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo**. Bolema,RioClaro– SãoPaulo,Ano21,nº 31.2008,p. 555a 78.

SHULMAN, L. S. **Those who understand**: Knowledge growth in teaching. Education Researcher. Feb. 1986: 4-14.

SOARES, S. T. C. **Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK: Proposta de Modelo Teórico**. 2019, 113f. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT), Cuiabá. 2019.

SPINK, M. J.; MENEGON, V.M.; MEDRADO, B. **Oficinas como estratégia de pesquisa**: articulações teóricas metodológicas e aplicações ético – políticas. Revista Psicologia & Sociedade, 26(1), p 32 – 43. 2014.

TIROSH, D. **Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions**: The case of division of fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 31(1), 5-25. 2000.

TYMINSKI, A.T.; DOGBEY, J. K. **Developing the Common Denominator Fraction Division algoritmos.** Mathematics Teaching in the Middle School , Vol. 18, No. 4 pp.248-253. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). EUA; November. 2012.

VALE, I. **Materiais Manipuláveis**. 1ª edição. Laboratório de Educação Matemática (LEM). Instituto Politécnico de Viana do Castelo Escola Superior de Educação. 2002.

VASCO, D. L.M**. Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal:** un estudio de casos en el nivel universitario. (Doutorado). Huelva, Espanha. 2015.

VASCO, D.; MORIEL JUNIOR, J.; CONTRERAS, L. C. **Subdominios del mathematics teacher´s specialised knowledge (MTSK)**: KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. In: JORNADAS DE INVESTIGACIÓ EM DIDÁTICA DE LAS MATEMÁTICAS, 3., 2017, Huelva, Espanha. **Anais...** Huelva, Espanha. 2017. p. 29 - 37.

VASCONCELOS, I. C. P. **Números Fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos da 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2007.

VERNEQUE, L. **Aprendizagem de Frações Equivalentes**: Efeito do Ensino de Discriminações Condicionais Minimizando o Erro e da Possibilidade de Consulta a Dicas. Tese de doutorado, Universidade de Brasília, Brasília. 2011.

WU, H. **Some remarks on the teaching of fractions in elementary school**. Califórnia, EUA, out/1999.

ZAKARYAN, D.; RIBEIRO, M. **Conocimiento de la enseñanza de números racionales**: una ejemplificación de relaciones. Zetetike, v. 24, n. 3, p. 301-321. 2017. ISSN 2176-1744.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO - TCLE

Número de Aprovação CAAE: 84205318.9.0000.8055

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado a participar, como voluntário (a), em uma pesquisa.
Após ser informado (a), e no caso de aceitar, assine ao final deste documento e rubrique todas as páginas. Este documento foi disponibilizado em duas vias, sendo uma sua e outra do pesquisador.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA

Tema da Pesquisa: Conhecimento Especializado para Ensinar Divisão de Fração: Atividades Formativas Baseadas em Questões de Práticas.

Pesquisador Responsável: Vicente Pedroso da Silva Filho.
E-mail: vicente. silva @cba.ifmt.edu.br Telefone: (65) 99946-3975
Orientador: Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior
E-mail: jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br Telefone: (65) 98112-1100

Objetivo da pesquisa:
Nesta pesquisa pretende-se compreender a potencialidade formativa do questionário MTSK (Conhecimento Especializado de Professores de Matemática) da divisão de frações para formar professores e licenciandos em Matemática; elaborar questionário de divisão de fração; discutir o questionário de divisão de fração em oficinas formativas de professores e licenciandos; identificar, analisar e interpretar os tipos de conhecimentos especializados para o ensino de Matemática mobilizado ou construído durante realização de oficina formativa conforme as categorias do modelo MTSK.

Resultados Esperados:
Com os dados obtidos por meio de oficina formativa pelos sujeitos da pesquisa, pretende-se aproximar a teoria da prática levando os resultados da pesquisa no campo da Educação Matemática para os sujeitos envolvidos com a pesquisa (professores de Matemática); promover

ações de formação e apoio ao ensino com foco na melhoria da qualidade da educação; servir de base para planejamento de cursos de formação inicial e continuada e fundamentada no MTSK.

Riscos aos participantes:

A Resolução 510/2016 estabelece "risco mínimo" para essa pesquisa. Como as entrevistas e oficinas serão gravadas e filmadas o risco mínimo é a identificação do sujeito, para isso a pesquisa terá o comprometimento do pesquisador no que se refere aos cuidados com o material, na transcrição, e de não utilizar frases que possam expor ou fazer com que o sujeito seja identificado.

Benefícios:

Os resultados finais desta pesquisa serão devolvidos ao(s) sujeito(s) que manifestarem interesse em recebê-los (ao final deste termo), por meio de documento escrito ou de uma formação continuada relacionada à temática desta investigação.

Função do Comitê de Ética da Pesquisa (CEP)

Tem sob sua responsabilidade a avaliação e acompanhamento dos aspectos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos.

Contato e Atendimento do CEP:

CEP/IFMT - Comitê de Ética em Pesquisa do IFMT- Instituto Federal de Mato Grosso Coordenadora: Marilu Lanzarin. E-mail: marilu.lanzarin@blv.ifmt.edu.br.Telefone: (65) 3616-4180. Avenida Senador Filinto Muller, 963, 1º andar, Bairro Duque de Caxias. CEP 78.043–400. Cuiabá – MT

Eu,____

Portador (a) do RG nº______________________________, abaixo assinado, concordo em participar da pesquisa cujo tema é "Conhecimento especializado para ensinar divisão de fração: atividades formativas baseadas em questões de práticas", como colaborador. Compreendo que terei garantia de confidencialidade das informações concedidas por meio de oficina e entrevista gravada e filmada, ou seja, que apenas os dados consolidados serão divulgados na pesquisa. **AUTORIZO** o pesquisador responsável, a colher meu depoimento, sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes. Ao mesmo tempo, libero a utilização destes depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências de publicação nacional e internacional). Entendo ainda que tenho direito de receber informações adicionais sobre o estudo a qualquer momento, mantendo contato com o pesquisador principal. Também fui comunicado, que minha participação é voluntária e que se eu preferir não participar ou deixar de participar deste estudo a qualquer momento, isto não me acarretará nenhuma penalidade. Entendo tudo o que me foi explicado sobre o estudo a que se refere esse documento e concordo em participar do mesmo.

Quero receber por e-mail os resultados da pesquisa ( ) SIM ( ) NÃO

Assinatura do Colaborador: ____

Assinatura do Pesquisador Principal: ____

___________________,______de___________________, de 20______

Certo que sua colaboração enriquecerá a pesquisa agradeço a participação.

APÊNDICE B – ROTEIRO ATIVIDADE FORMATIVA

1. Conduta Inicial – Oficina Formativa

- Apresentação do pesquisador;
- Apresentação dos participantes da pesquisa;
- Realização da oficina formativa para discussão de questões baseadas em situações de práticas ligadas ao ensino de divisão de frações.

2. Dinâmica da Oficina

Para melhor desenvolvimento da oficina, deve-se procurar seguir sempre o roteiro padrão;

- Registrar todas as ações desenvolvidas na oficina;
- Procurar usar sempre a mesma dinâmica.

Ao apresentar a questão:

-Solicitar que os alunos discutam, pensem, apresentem soluções e registrem suas resoluções. Cada questão apresentada para os acadêmicos foi acompanhada, por parte do pesquisador, por uma pergunta desencadeadora/provocadora.

- A partir das respostas dos alunos, o pesquisador devolve uma outra pergunta, se tiver algo a explorar.
- Caso seja necessário, se os mesmos não se pronunciarem após um determinado tempo da apresentação da questão, procura-se travar um diálogo provocativo para que os mesmos possam se manifestar.

Ao final da discussão da questão deve-se:

- Dar um determinado tempo para que os alunos apresentem uma resposta;
- Solicitar aos alunos que escrevam na lousa ou em papel apropriado e comentem seus resultados.

3. As questões da oficina formativa:

-É importante trabalhar diversas questões do subdomínio do MTSK, pois este conteúdo envolve conhecimentos de outras áreas da Matemática;

-O investigador, ao final da discussão e também ao longo da mesma, poderá apresentar ou entregar, aos sujeitos, materiais auxiliares contendo complementação dos assuntos discutidos.

4. O Pesquisador deve:

- Procurar diversas formas de abordar as resoluções dos sujeitos, evitando tendenciar as respostas;
- Conhecer os teóricos citados na oficina;
-Procurar diversos recortes mostrando outras situações de questões para exemplificar aos alunos;
-Incentivar o aluno a comentar e, ainda, mostrar que, na discussão apresentada, outro colega traz aprendizagem e que essa interação é interessante e muito importante, caracterizando um trabalho de aprendizagem coletiva;
-Incentivar os alunos a construir, criar hipóteses, buscar padrões, conjecturar, a testar cada questão apresentada a eles;
-Não se apegar à noção de que tem que testar se o aluno sabe ou não e, sim, fazer com que ele mobilize ou construa o conhecimento;
-Se isentar de apresentar a resolução como se fosse um expositor.

5. Apresentação e desenvolvimento das questões:

- Não apresentar a questão inteira aos sujeitos;
- Ao apresentar a questão, inicialmente, mostrar a situação e assim, de modo sucessivo, ir revelando o desenvolvimento da questão e deixar para o último instante a resolução da questão;
- Dar sempre um passo de cada vez, organizando os slides para isso;
- Apresentar recortes mostrando outras situações com questões para cada subdomínio;
- Mostrar a situação: questão baseada em situações de prática;
- Colocar essa situação para os sujeitos: **se coloque no papel do professor que trabalha com divisão de frações e se depara com esses processos de solução. O que você tem a dizer sobre isso**?
- Quando da demora dos alunos para pensar, o pesquisador deverá ter paciência, esperar, e depois organizar as discussões.
-Uma questão bem elaborada pode mobilizar outros subdomínios.

6. Das perguntas:

- Deverão serem feitas sempre com objetivo de explorar o conhecimento especializado do sujeito e de acordo com cada subdomínio do MTSK, envolvido na questão.

APÊNDICE C – AS QUESTÕES DE PRÁTICAS DA OFICINA FORMATIVA

QUESTÕES BASEADAS EM SITUAÇÕES DE PRÁTICA LIGADAS AO ENSINO DE DIVISÃO DE FRAÇÕES

Situação 1. Um professor propõe o seguinte problema: "Uma impressora pode imprimir 20 páginas em dois minutos e meio. Quantas páginas ela imprime por minuto?".

Como você resolve esse problema utilizando divisão de frações?

Um aluno apresenta a seguinte solução:

20 páginas em $2\frac{1}{2}$ minutos

40 páginas em 5 minutos

8 páginas em 1 minuto

Se coloque no papel do professor que trabalha com divisão de frações e se depara com esses processos de solução. Como usar esta resolução para trabalhar divisão de frações / sistematizar a divisão de frações? (Extraído de MORIEL JUNIOR et al., 2017)

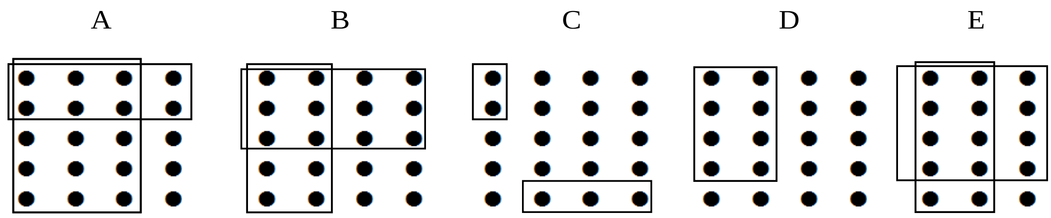
Situação 2. Se coloque no papel de um professor trabalhando divisão de frações em sala de aula que se depara com os seguintes processos de resolução de alunos:

Como você avalia esta resolução? (Extraído de MORIEL JUNIOR et al., 2017)

Resolução A	Resolução B	Resolução C	Resolução D
$\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$	$\frac{8}{9} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$	$\frac{22}{21} \div \frac{2}{7} = \frac{22 \div 2}{21 \div 7}$

Situação 3. Diversos estudos mostram procedimentos alternativos aos algoritmos para fazer a divisão de frações. Trata-se da manipulação de diagramas pictóricos, incluindo formas geométricas (retangulares, circulares, poligonais ou lineares) ou imagens de objetos (LI, 2008). Alguns estudos chamam isto simplesmente de resolver com desenho (Nillas, 2003; Rule; Hallagan, 2006).

Utilizando figura(s) como você representaria com validade matemática a divisão $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ e a sua resposta? (Extraído de MORIEL JUNIOR et al., 2017)



Situação 4. Ao avaliar o *processo* de cada resolução A, B, C e D, qual é a conclusão que você chega sobre as condições necessárias e suficientes para que cada um dos processos forneçamo resultado correto para a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$. (Extraído de MORIEL JUNIOR et al., 2017)

Resolução A	Resolução B	Resolução C	Resolução D
$\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$	$\frac{8}{9} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$	$\frac{22}{21} \div \frac{2}{7} = \frac{22 \div 2}{21 \div 7}$

Situação 5. Na literatura é possível encontrar diversos tipos de problemas de divisão de frações. Qual é a característica do problema abaixo?

A. Se $\frac{3}{7}$ de um saco de balas foi repartido entre 5 crianças, quanto do saco de balas terá cada uma delas?

B. Hoje me exercitei $\frac{1}{4}$ de hora e ontem $1\frac{1}{2}$ de hora. Quantas vezes me exercitei hoje comparado a ontem?

C. Quantos pedaços de corda com tamanho de $2\frac{1}{2}$ metros é possível obter a partir de um rolo de corda medindo $10\frac{1}{2}$ metros de comprimento?

D. Se a área de um retângulo tem $13\frac{1}{2}$ m^2 e sua largura $3\frac{1}{4}$ m, qual é seu comprimento?

E. João correu $1\frac{1}{2}$ km ontem e isto é $\frac{3}{8}$ da sua meta, assim sendo, quantos quilômetros ele planeja correr?

F. Se com $\frac{2}{3}$ de uma lata de tinta dá para pintar $\frac{3}{4}$ de uma parede, que fração da parede pintarei com 1 lata de tinta?

G. Quantas paredes pintarei com $\frac{3}{5}$ de lata de tinta, sabendo que se usa $\frac{1}{2}$ lata para pintar uma parede?

Distribuição entre inteiros
Comparação com valores de uma variável
Proporção entre duas grandezas
Proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido
Proporção entre duas grandezas com valor unitário conhecido
Um fator desconhecido de um produto ligado a área retangular
Comparação entre uma grandeza e uma razão adimensional

(Extraído de MORIEL JUNIOR , 2014)

APÊNDICE D - PERGUNTAS COMPLEMENTARES A SEREM UTILIZADAS PARA FOMENTAR A DISCUSSÃO DURANTE OFICINA FORMATIVA

As perguntas foram baseadas em: MORIEL JUNIOR, 2014; MONTES, 2014; ROJAS, 2014; VASCO, 2015; FLORES MEDRANO, 2015; ESCUDERO-ÁVILA, 2015:AGUILAR, 2015.

1) Identificar padrões comuns nos erros dos alunos na divisão de frações? Como comparar esses erros?
2) Como podem interpretam as possíveis fontes de padrões de erro dos alunos
3) Que estratégias de ensino sugerem para ajudar os alunos que usam sistematicamente os padrões de erro?
4) Como a habilidade dos professores para identificar padrões de erro relaciona-se com seu conhecimento das possíveis causas de erros e de estratégias de instrução para lidar com os padrões de erro dos alunos?
5) Que conhecimento sobre a divisão de frações o aluno que usou o padrão de erro não? O que o aluno que usou o padrão de erro comum ainda não entende sobre a adição de fração?
6) Como você ajuda o aluno que usou o padrão de erro a superar seu erro?
7) Como generalizar cada um dos procedimentos?
8) Explique como usar representação geométrica para realizar divisão de frações.
9) Justifique algebricamente.
10) O que você pode dizer sobre as diversas possibilidades de respostas que vimos nesta oficina?
11) você quer tentar fazer essa demonstração?
12) Como você explica o inverso multiplicativo?
13) Você consegue definir o que é um corpo?
14) Além dessa conexão entre corpo e ..., você viu maisalguma?
15) Vocês conseguiriam provar que é errado? Faça essa divisão usando esse método e veja se dá certo.
16) Que conceito você usou?

17) A minha pergunta é: como validar esse algoritmo para a divisão de quaisquer duas frações?
18) Você gostaria de tentar? Você consegue pensar algo neste sentido?
19) Quando você diz exato o que você está querendo dizer?
20) Esse é um problema matemático ou pedagógico (por exemplo, fica mais complicado para ensinar etc.)?
21) Como classificar isso? É uma estratégia de ensino, é um procedimento, um algoritmo?
22) Essa divisão pela chave mostrou alguma coisa diferente que a gente ainda não tinha visto sobre como dividir? Como ela dividiu essas frações?
23) Matematicamente, isso é certo ou errado?
24) Será que não foi uma coincidência? Vamos testar outro? Qual divisão vocês querem fazer?
25) Por que você diz que o aluno ainda não conhece?
26) Você acha importante construir essa ideia e esse problema ajuda, é isso?!
27) Para qual ano letivo isto é adequado?
28) Matematicamente, isso é certo ou errado?
29) Será que não foi uma coincidência? Vamos testar outro? Qual divisão vocês querem fazer?
30) Por que você diz que o aluno ainda não conhece?
31) Você acha importante construir essa ideia e esse problema ajuda, é isso?!
32) Para qual ano letivo isto é adequado?
33) O que isto significa para você? Aqui você mencionou que..., fale mais sobre... e Por que você pensa que
34) O que você pode dizer sobre as diversas possibilidades de respostas que vimos nesta oficina?
35) você quer tentar fazer essa demonstração?
36) Como você explica o inverso multiplicativo?
37) Você consegue definir o que é um corpo?
38) Além dessa conexão você viu maisalguma?
39) Vocês conseguiriam provar que é errado? Faça essa divisão usando esse método e veja se dá certo.
40) Que conceito você usou?
41) como validar esse algoritmo para a divisão de quaisquer duasfrações?

42) Você gostaria de tentar?

43) Você consegue pensar algo neste sentido?

44) Quando você diz exato o que você está querendo dizer?

45) Como classificar isso? É uma estratégia de ensino, é um procedimento, um algoritmo?